リーマン予想

鹿野 健
編著

Georg
Friedrich
Bernhard
Riemann

はじめに

およそ数学に関心ある人で，リーマン（B. Riemann）の名を知らぬ人はいない．そして，あの名高い“リーマン予想”なるものについて，その内容はともかくとして，その名称ぐらいは知っている人がほとんどであるに違いない．

本書の目的は，このリーマン予想に焦点を絞って，リーマンの考えたこと，その後の発展などについて，専門家以外のなるべく広い読者に興味を持っていただけるように，内容にも構成にも配慮して解説をしようというものである．この種の本が邦書には今までなく，外国においてもわずかに H. M. Edwards の Riemann's Zeta Function（Academic Press, 1974）ぐらいのものであることは，考えてみると不思議であるが，リーマンの研究が本来非常に高度な内容と深さを持った歴史的成果であることを思えば，容易に成書を著すことはできなかったことと想像される．

私が本書の計画を立てた動機は2つほどあって，そのうちの1つは，私が以前から持っていた嗜好の1つである古典愛好ということであり，これは最近ますます盛んになってきている現代数学史の研究という風潮にも大いに刺激されている．別の1つは，1984年オクラホマ州立大学で行なわれた数論のシンポジウムに参加した際に，ある数学者から聞いた噂である．講演と講演の間の休憩時間中に数人の人達とコーヒーを飲みながら立話をしていたとき，そのうちの一人が突然，最近リーマン予想を証明したという論文がフランスのある数学雑誌に投稿されて来た，と我々に話したのである．驚いてなおよく聞くと，その論文は10ページ足らずの短いもので，肝心のその証明は何人かのレフェリーによ

って読まれたが，遂に誰も間違いを発見できなかったという．今までにもそのような話は何回とあり，いずれも結局だめであっただけに，内心まさかと思いつつもヒョッとするとの気持もあった．そのときはその論文の著者が実は日本人であるということは話に出てこなかったので知らなかったのであるが，帰国して少ししてから，「リーマン予想M氏によって証明さる」のニュースが入って来て，ああこれがあのときの，と思いいたったのである．

オクラホマでの私の話自身が，たまたまリーマンの論文（リーマン予想所載のものとは別の）に端を発するものであっただけに，これも因縁と感じて，以前からの計画を実行する気になったのであるが，私一人ではとうてい実現不可能であるところを，金光滋，小山陽一，平林幹人，山野剛助，吉野健一の諸氏の全面的な御協力を得て，ここに本書を送り出すことができたのであり，これら著者達に深く感謝する．

また，日本評論社の亀井哲治郎氏には，このような計画を実現する機会を与えてくださったことと，完成にいたるまで忍耐強く待っていただいたことについて，著者達を代表して御礼申し上げる次第である．

1991年春　岡山にて

鹿野 健

目次

はじめに

第1章　概説 ………………………………………… 1
§1.　Riemannの動機と意図 ………………………… 1
§2.　歴史的展開 ……………………………………… 9

第2章　Riemannの原論文とその解説 ……………… 17
§1.　原論文 …………………………………………… 17
§2.　RiemannからWeierstrassへの手紙の草案 ………… 40

第3章　ゼータ関数の零点に関する数値計算 ………… 45
§1.　計算の歴史 ……………………………………… 45
§2.　$\sigma = \frac{1}{2}$ の線上での零点の探査 ……………… 48
§3.　Euler - Maclaurinの和公式 ………………………… 50
§4.　$\xi(s)$ の近似公式 ………………………………… 55
§5.　$\vartheta(t)$ の近似公式 ………………………………… 61
§6.　t が小さいときの $Z(t)$ の値の計算と
$N(t)$ の数え上げの方法 ………………………… 64
§7.　Riemann - Siegel公式 ……………………………… 70
§8.　t が大きいときの零点分布の研究 ………………… 74

第4章　Riemann予想に同値な命題 ………………… 86
§1.　解析的数論から ………………………………… 87
§2.　関数解析から …………………………………… 96

§3. 保型関数の散乱理論から …… 102
§4. 拡散過程によるアプローチ …… 109

第5章 Riemann 予想からの帰結 …… 119
§1. Lindelöf 予想と約数問題 …… 119
§2 Moser の宇宙論から …… 127
§3. 明示公式とその応用（Mertens 予想の反証） …… 132

第6章 Riemann ゼータ関数のいろいろな拡張 …… 145
§1. Dirichlet 級数と Dirichlet L 関数 …… 145
§2. Dedekind ゼータ関数 …… 155
§3. Epstein ゼータ関数 …… 167

第7章 Weil - Deligne の定理 …… 177
§1. Weil の結果 …… 180
§2. 有限体上の代数幾何学 …… 182
§3. 代数多様体の合同ゼータ関数 $Z(u,X)$ …… 188
§4. Riemann - Weil 予想と Deligne による証明
（Weil - Deligne の定理） …… 190
§5. Weil - Deligne の定理の応用 …… 192

索引

装丁 ＝ 駒井佑二

●**執筆分担**

第 1 章——鹿野 健

第 2 章——平林幹人

第 3 章——山野剛助

第 4 章——金光 滋

第 5 章——金光 滋

第 6 章——吉野健一

第 7 章——小山陽一

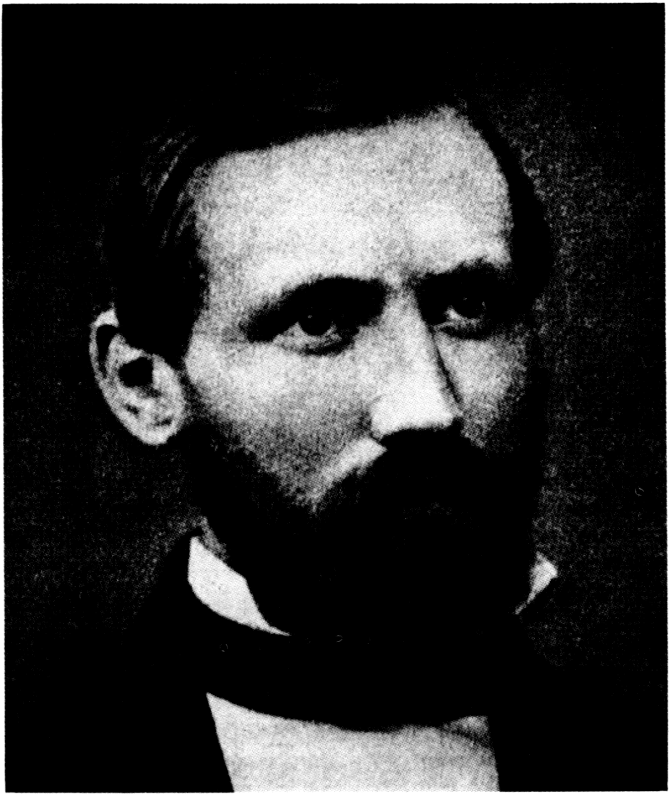
●**写真提供**

vi ページ——B. Riemann《Collected Papers》Springer-Verlag

7 ページ，19-20 ページ，85 ページ，118 ページ——

ゲッチンゲン大学図書館

Niedersächsische Staats-Universitätsbibliothek Göttingen



リーマン

●第 1 章

概説

§ 1. Riemann の動機と意図

ここでは Riemann の原論文：Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse（Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859[0)]）が書かれた背景を考察してみよう.

Riemann の論文の多くがそうであるように，この名高い論文も résumé であり，その 8 ページの中に濃密に込められたいくつものアイデアと深い洞察，そしてそれらの背景をなす精密な計算の裏付け，とそのどの 1 つもが彼の才能のすばらしさを示すものである．そこで証明が与えられている結果は少なく，逆に簡単な示唆や筋道しか与えられていない結果の方が多いということは，後の数学者達の格好の刺激となって，それらを確認するという試みはすでに Riemann の生存中に始まったが，彼の主張の 1 つを証明するまでにも 30 年以上を要したのである．すなわち，最初の成功は Hadamard によって 1892 年［7］に，ついで翌 1893 年

---

0)　Riemann の師にして友人であった Dirichlet の没したのが，偶然この年の 5 月 5 日であった.

[8] にもたらされ，そして von Mangoldt [17] は 1895 年に残りの問題を解き，ここに “Riemann 予想”[1]としてただ 1 つ残された難問を除いて，一応 Riemann の示した結果を確認することができたのであった．それは，Hadamard らによる関数論，とりわけ整関数論の発達と歩調を合わせたもので，この時代以降，およそ第 2 次世界大戦以前まで，Riemann 予想を含む一連の問題は解析学，特に関数論の応用対象として研究されることとなる．

その展開を略説する前に，この節では重要な 1 つの課題を考えよう．それは，Riemann の motivation は何か，つまり，彼はいかなる動機，考えからこの論文を著したか，という問題である．思うにこれは，Riemann がその論文中で，後世 “Riemann 予想”[2]とよばれるようになったものについて “…… es ist sehr wahrscheinlich, ……” と述べるにいたった理由を推測する前に考えておくべき問題であり，そこから自然に上の疑問，すなわち Riemann 予想の背景の推理へと導かれるのである．

実は，その手掛かりは論文自体にある．もっと端的にいえば，論文の表題自身にある，と思われる．今その表題，

「与えられた数より小さい素数の個数について」

の下で素直にこの論文を読み進んで 8 ページを読了したとき，何か妙な気持，しっくりとこない感じを心の片隅に持たないであろうか？　いかに résumé とはいえ，その読後の印象は “中途半端”

---

1)　すなわち，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の自明でない零点（複素根）の実部はすべて 1/2 である，という予想．詳しくは §2 参照．

2)　Riemannsche Vermutung と命名したのは Landau で，Riemannsche Hypothese といういい方は Bohr による．英語の Riemann Hypothesis というよび方は Hardy に始まる．

3)　Riemannsche Primzahlformel という命名は Landau (1908) による．

4)　$\mathrm{Li}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\right)\frac{dt}{\log t}$. また今日では $F(x)$ の代りに $\pi(x)$ と書くが，これは Nielsen [18] に始まる．これを広めたのは Landau [13].

5)　本来はロシア文字で，アルファベットでは Tchebycheff 等とも書く．

がいいすぎならば，“未完”である．その主な理由は，表題にあるような，x 以下の素数の個数——それを $F(x)$ と Riemann は表わす——についてのいわゆる素数公式[3]を与えながら，そして Gauss の名をあげて $x \leqq 100$ 万までの範囲では

(1)　$F(x) < \mathrm{Li}(x)$ [4]

であることが確かめられていると述べながら，素数公式が $F(x)$ に対してどのように良い近似を与えるのかについてはあいまいな表現しかしていないからではないだろうか？　Chebyshev[5]の仕事については言及していないが，Riemann がそれを知っていたことは明らかであり，そうならば何故に $F(x)$ に対しての従来の研究，とりわけ Chebyshev によって初めて核心を衝かれた予想

(2)　$F(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ [6]

との関連に言及しなかったのであろうか？

そして，誰が見ても，この表題の下ではどうしてもこの予想，つまり後に“素数定理”[7]とよばれるようになったものの証明を期待させるものであり，少なくとも何らかの直接的な成果が示されているものと思わせるのである[8]．しかし実際は，上に述べたようにその最後の結論は奥歯に物が挟ったような言い方できわめて歯切れが悪く，そこにいたるまでの見事な構成と運び方に感服して読み進んで来ただけに，正直いって何か裏切られた感を抱かざるを得ないのである．

---

6)　$F(x)/\mathrm{Li}(x) \to 1$ $(x \to \infty)$ の意味．$\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$ である．この記号 $\sim$ は du Bois Reymond によって，初め $f(x)/g(x) \to A(\neq 0)$ の意味で導入されたが，後に Hardy が $A=1$ の場合に用いるようになり，これが定着した．

7)　“Primzahlsatz”という命名は，von Schaper（Dissert. 1898）による．これを定着させたのは Landau である．Landau[13] 参照．

8)　Chebyshev [4] の表題との類似に注意．なお，Chebyshev の結果はすでに 1849 年の彼の著書 [3] に，付録 III として発表された．しかし，その独訳 [3] では，（出版社の意向で）その付録 III だけが高級すぎるという理由で削除され，Chelsea 版でもそのままで，誠に惜しい．

私は次のように想像する．すなわち，Riemannはこの素数公式を通して素数定理を証明する，という方針を立て，そのプランの下にさらなる計算を続けて，恐らく一時はそれに成功したと思ったのであろう．それをまとめて論文として書き進めるうちに，彼は自分の計画に重大な困難（あるいは見落し）のあることを発見したのではないだろうか？　あるいは，この論文を第1編として，後続の第2編を発表し，そこで素数定理を証明するというつもりであったのかも知れない．しかし，いずれにせよ何らかの齟齬を来たして，計画は完成されないまま，彼の早世とともに終息したのである．そして，その計画を阻害した最大の原因は何かといえば，恐らくそれがRiemann予想であったと思われる．実際，もし素数公式から，$F(x)$ の主要項がその第1項 $\mathrm{Li}(x)$ であって，他のすべての項を吸収した誤差項がそれよりも小さいことがいえれば，それがすなわち (2) であり，素数定理に他ならないのであるが，Riemannはそこで誤差項の大きさが $\sqrt{x}$ の大きさであるかのように受け取れる妙な言い方をしている．しかしこれは，後に1901年にvon Koch [12] が証明したように，Riemann予想を逆に証明するものである．また，1903年にSchmidt [20] が証明したように，不等式 (1) が（十分大きな）すべての x について成り立つという仮定[9]もRiemann予想を証明することとなる．いずれにせよ，Riemannはここで $F(x)$ の誤差項の大きさがRiemann予想と直結していることを見抜いていたものと十分に推測されるのである．

ここに次のような歴史的事実がある．論文と同年の1859年の10月26日に，RiemannからWeierstrassに宛てた私信があり，その中でRiemannは論文中の何ケ所かの証明が完全にはできていないことを認めている[10]．一方1932年，Siegel [21] はきわめ

9)　この仮定自身は誤りであることは，Littlewood [15] によって示された．

て興味深いその論文の冒頭でやはりこの Riemann の私信に触れ，Riemann はその中でゼータ関数の新しい展開を知らせつつも，それは素数論に対する彼の成果を報告できるほどまでにはまだ十分整理されていない，とも述べているという．これらの事実は，Riemann 自身の研究が当時かなり流動的であり，理論の全体が確定はしていなかったことを示すものである．したがって，そのような状況下で書かれた 1859 年の論文は，明らかに過程的，部分的なものであって，素数定理の完全な証明を含むはずのその続編は，Riemann 予想の克服を経てやがて書かれる予定のものであったと想像されるのである．論文の表題は，そのような計画の見通しに自信があったからこそ，恐らく意識的に（Chebyshev の仕事を念頭に置いて）設定されたものであろう．

上で，その計画中に生じた最大の障害が Riemann 予想であったと述べたが，そこでは Riemann は二重に不運であった．第1に，素数定理は 1896 年になってようやく Hadamard [9] と de la Vallée-Poussin [22] とによって独立に証明されたのであるが，その後の Landau の研究 [13] などによって，実は素数定理 (2) を得るには素数公式も Riemann 予想も不要であり，本質的なことはただ，ゼータ関数の自明でない零点の実部は決して 1 ではないという事実の証明にある，と解明されたことである．皮肉にも，素数公式に固執していてはこの事実は導かれないのである．第2の不運は，Riemann 予想そのものが，（恐らく）Riemann の思っていた以上に解決困難であることが，その研究を進めるうちにますます明らかになって来たらしいということである．先の Siegel の論文は，上の私信を足掛かりにして，Riemann の未発表の草稿が Göttingen 大学に残されているのではないかと期待し

10)　Weber 編集の全集第2版（1892）[19] における後注 “Anmerkungen” および同全集の新版中の手紙（[19] p. 823〜825）参照．なお，Riemann の論文は 1859 年の 11 月に発表されている点に注意．

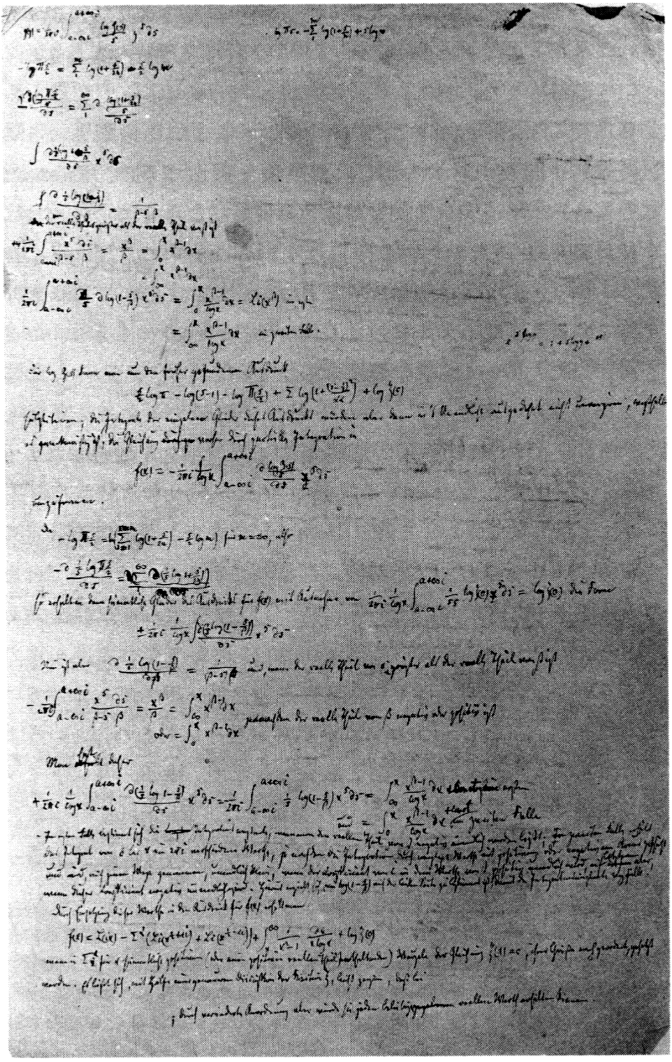
て探した結果発見された[11]という幸運なそして貴重な遺稿を，Siegelがその鋭い洞察と卓越した計算とによって解読し，Riemannが当時この問題についてどのような研究をしていたかを明らかにしたもので，数学史の上からもまた数学の上からもきわめて興味深く示唆に豊む論文である．

その中には2つの重要な結果が含まれていて，いずれもが初めて公にされて詳細に検討を加えられたものである．その1つは，後年Riemann-Siegel公式とよばれるようになったもので，それはゼータ関数の（虚部tに関する）漸近展開公式の一種である．RiemannとSiegelは特にそれを，Riemann予想の上で重要な，実部$=\frac{1}{2}$の場合について詳細に計算する．そこから，Riemannがゼータ関数の問題の零点，すなわち$s=\frac{1}{2}+it$の形の零点を実際にどのように計算したかを再現させるのである．

このRiemann-Siegel公式は数学的には深いもので，同時に零点の実際計算に役立つ（Riemannの時代のように計算機がなくとも！）ものでもあるが，遺憾なことに，これ自身は素数定理の証明にも，ましてRiemann予想の証明にも役立たないのが現状であり，Riemannがこの結果を論文に著すことがなかったのも，あるいはそれが原因であるかも知れない．ところで，この遺稿中に，RiemannがChebyshevへ書こうとしたと思われる手紙の冒頭の下書[12]と思われる個所も見え，RiemannがChebyshevの仕事を知っていたばかりでなく，彼に自らの発見（恐らくは素数定理の証明の第一報）を知らせるべく準備していたらしいことすらをも推測させるのである．しかしながら，Siegelの努力にもかかわらず，この発見された遺稿だけからでは，残念ながらRiemannの確信（Riemann予想についての）がどこから来たかを推測する

11）［21］によれば，（1932年の）10年ほど前にDistelなる図書館員によって発見されたという．なお，脚注15）参照．

12）Edwards［6］p. 5参照．



論文の下書き（計算用紙）

ことはむずかしい．失われた他の何らかの草稿中にその証拠が残されていたものであろうが，そのような新たな遺稿が発見されるという期待もまた，捨てがたい夢の1つではある．

話は戻って，Siegelの論文中にあるもう1つの結果というのは，ゼータ関数に対する新しい無限積分表示である．Riemannはそこからゼータ関数の関数等式[13]の別証明を与えているが，この積分表示は1926年[14]まで知られなかったもので，Siegelの論文のレヴュー[15]の中でHardyはRamanujanがそれに似た表示を得ていることをわずかに注意している．Siegelはさらに，この応用として，ゼータ関数の問題の零点（すなわち，実部$=\dfrac{1}{2}$の自明でない根）の個数を下からeffectiveに評価できることを示して，それまでのHardy-Littlewoodの結果［10］を改善したのである．

さて，以上見てきたように，Riemannの本来の目的は素数定理を証明することにあったと想像されるのであるが，その企ては思わぬ障害——Riemann予想——に会って挫折する．素数公式からRiemann-Siegel公式へとRiemannは恐るべき力で進んだのであるが，皮肉なことにそれは素数定理を飛び越えてしまっていたのである．しかし，Riemannが素数定理を証明した，というように誤り伝えられていた時期もあったらしく，欧州，特にドイツの数学者に暗かった当時の遅れた英国では，Riemannの仕事の真価を知る人は少なかった．たとえば，Littlewoodが後年語っ

13） $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ とをつなぐ等式．§2参照．

14） ［21］によると，1926年に新たに発見されたRiemannの論文の校正刷の1つの中に，Bessel-Hagenが見出したという．Edwardsはこの実物を見てはいないようである．これも現在行方不明なのであろうか？

15） Zentralblatt für Math. 4（1932），105-106. これはHardy全集には未収．

16） Littlewood［16］参照．『数学辞典』第3版（岩波，1985年）の「リーマンの予想」の項の記述（p. 537～538）も奇妙である．

17） 当時の英国の数論については，著者の［11］を参照．

たところによれば，Hardy は，まだ彼が数論に足を踏み入れる以前は，Riemann によって素数定理は証明されていると思っていたそうで[16]，Littlewood 自身も彼の数学者としてのスタートの時期に，恩師の E. W. Barnes から与えられた“適当な課題”が，Riemann 予想を証明することであった，というのも，後の Hardy-Littlewood のコンビを思い合わせると感無量である[17]．

しかし，Riemann の投じた一石の波紋はそれ以後ますます拡大を続け，とりわけ Riemann 予想をめぐる解析的な問題はまず Landau と Hardy-Littlewood，それと Bohr によって集中的に研究され，ここに数論の解析的理論，すなわち解析数論[18]の基盤が確立された．

Fermat の“大定理”[19]が代数数論に果たした役割とちょうど同じような役割を，Riemann の論文と Riemann 予想が解析数論に対して果たしたといっても，決して過言ではないのである．

§2. 歴史的展開

$$(*)\quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$(s=\sigma+it,\ \sigma>1,\ t$：実数，$p$ はすべての素数を動く)

を Riemann ゼータ関数といい，Riemann が 1859 年に初めて複素数の s について定義した[20]．

ちなみに，彼は $s=a+bi$ と書き，$s=\frac{1}{2}+ti$ とも書いている

18）“Analytische Zahlentheorie”といういい方は，Mertens の 1874 年の論文（J. f. r. a. Math. Bd. 78）に始まると思われるが，この命名を広めたのは Bachmann [2] である．また，これは史上最初の「解析数論」の本である．なお，これに相当する英語は Hardy (1915) により，仏語は Hadamard (1901) に始まると思われる．

19）足立 [1] 参照．

20）等式（$*$）は，s が実数で $s>1$ のときにすでに Euler によって得られていた．

が，$s=\sigma+it$ という書き方は Landau (1903) に始まる[21)].
Riemann はこの $\zeta(s)$ について，

(1)　$\zeta(s)$ は $s=1$ を除いて全平面で正則．$s=1$ は1位の極でそこでの留数は1, すなわち，

$$(s-1)\zeta(s) \qquad \& \qquad \zeta(s)-\frac{1}{s-1}$$

はともに整関数.

(2)　$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$　で s を $1-s$ に置き換えても値は同じ.

[関数等式]

であることなどを示した上で[22)]，次の結果を詳しい証明なしに述べた.

I. $\zeta(s)$ の零点は，$0<\sigma<1$ の範囲に無数にある．それらは，(2) の関数等式によって $\sigma=\frac{1}{2}$ に対して対称.

II. 上記の零点で，$0<\sigma\leqq T$ の範囲にあるものの総数を $N(T)$ とすると，

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log 2\pi}{2\pi}T+O(\log T)$$ [23)]

III. $\zeta(s)$ の複素零点を $\rho=\beta+i\gamma$ $(0<\beta<1)$ とすると，

$$\Sigma\frac{1}{|\rho|^2}<\infty, \qquad \Sigma\frac{1}{|\rho|}=\infty.$$

IV. $$(s-1)\zeta(s)=Ae^{Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

と分解できる.

V. $\zeta(s)$ の $0<\sigma<1$ の零点はすべて $\sigma=\frac{1}{2}$ の上にのみある.

---

21)　Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, Math. Ann. 56 (1903), 645-670. (=Landau 全集第1巻 p. 327-352)

22)　この他にも，$\zeta(-2n)=0$ などを述べている.

23)　Riemann の文章では，ここは $o\left(\frac{1}{T}\right)$ とも読める．しかし，Edwards [6] は「相対誤差」の意味にとるという．なお，明らかに，II ⇒ I.

VI. 素数公式.

この中のVがRiemann予想であり，これだけが未解決である．

ところでLandauは1903年当時には，リーマン予想を信じていなかったようである．彼は論文

"Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression"

(Wiener Sitzungsberichte 112 (1903), 493-535) の p. 3

(= Landau全集 vol. 2 の p. 19)

の脚注において次のように述べている．

"Eine――von Riemann a. a. O. ausgesprochene Vermutung ist bis heute nicht beweisen, also vielleicht nicht richtig." (上でRiemannの述べた予想は今日も証明されていないが，恐らく正しくないであろう)．

記号 $\pi(x)$ はN. Nielsenの著書 [18] (1906) に始まるが，その§39 (p. 92-94) の記述 (Li(x) の数論への応用) についての批判をLandauは与えているが，記号 $\pi(x)$ は気に入ったらしく，以後Handbuch [13] などにおいて使用され，広まった．

記号 O, o について

O はBachmann [2] に始まるが，o はLandauによる (Handbuch [13] の注 p. 883 参照)．なお，Landauはそれまでは o の代わりに{　}なる記号を用いていた．

Siegelは [21] で示した，Riemannによる $\zeta(s)$ の無限積分表示：

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$
$$=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\int_{0\swarrow 1}\frac{x^{-s}e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\,dx$$
$$+\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\int_{0\swarrow 1}\frac{x^{s-1}e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\,dx$$

(Bessel-Hagenが1926年に発見したRiemannの校正刷中

のもの)

から，$\sigma=\frac{1}{2}$ 上の零点の個数 $N_0(T)$ に対して，explicit 評価

$$N_0(T)>\frac{3}{8\pi}e^{-\frac{3}{2}}\cdot T+o(T)$$

を与えたが，Siegel は後に Annals of Math. 44 (1943) 143-172 (=Sigel 全集 Bd. II p. 360-389) においてこの方法を改良，簡単化すると同時に，Dirichlet の L 関数と Epstein のゼータ関数とにそれを応用した.

しかし，その結果は，ζ については Selberg (1942) が

$$N_0(T)\geqq CT\log T \qquad (C\text{ は計算可能な正定数})$$

を示していたが，Siegel はこれを知らなかったようである. L 関数については，三井孝美がやはり Selberg の方法によって導いている.

Dirichlet の L 関数の記号について

Dirichlet は，たとえば Vorlesungen über Zahlentheorie [5] においては，指標 $\chi(n)$ を，3 つの型すなわち原始指標，実指標，複素指標に分類し，それぞれに対応して，$L_1(s), L_2(s), L_3(s)$ でもって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

を表わしている.

今日の通常の記号 $L(s,\chi)$ は，Landau の Handbuch [13] に始まる.

Landau の Handbuch [13] は彼が 32 歳 (Landau：1877-1938) のときに著された大著 (原著 962 ページ，Dover 版 1001 ページ！) であるが，その序文の最後で彼は次のように述べている：

“昔からの未解決問題があまりにむずかしすぎて，多くの人達を素数論 (Primzahltheorie) から遠ざけていたが，これから以後

多くの人達が歩み，従えるような新しい道を私がここに築き上げることができればと思うのである.”

若き Landau の目標はまさにここにあり，そのためにこの歴史的大著は著わされたのである．英国の Hardy と Littlewood は共にこの書を通じて解析数論を学び，開眼したといっても過言ではない．

Handbuch で Landau が示したように，Hadamard [9] と de la Vallée-Poussin [22] とによって独立に 1896 年に証明された素数定理

$$\frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} \to 1 \qquad (x \to \infty)$$

は，1899 年になって de la Vallée-Poussin によって

$$(**) \quad \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \qquad \exists c > 0$$

と精密化されたが，Landau (1903) はその方法をいちじるしく簡易化し，Hadamard の整関数論によらず，そしてさらに重要なことに，$\zeta(s)$ が $s=1$ を除く全平面で正則であるという事実や関数等式をも必要とせずに，(**) よりも少し弱い形の

$$(***) \quad \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-\sqrt[\gamma]{\log x}}), \qquad \exists \gamma \geqq 13$$

を導いてみせた．

この方法は，“素イデアル定理”の証明 (Landau, 1903) において本質的に役立った．なぜならば，1917 年に Hecke が Dedekind ゼータ

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}$$

が s の全平面に解析接続されることを示すまで，この事実は使えなかったからである．

Riemann の素数公式：

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{p^m \leqq x} \frac{1}{m}$$ [24].

に対して，

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho', \rho''} (\mathrm{Li}(x^{\rho'}) + \mathrm{Li}(x^{\rho''})) + \int_x^\infty \frac{dy}{(y^2-1)y \log y} - \log 2,$$

（ここに，ρ', ρ'' は $\zeta(s)$ の虚根で，$\rho' + \rho'' = 1$，$\rho' = \beta + \gamma i$）は von Mangoldt ［17］が初めて証明した．彼は同時に，

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log^2 T)$$

もそこで示したが，誤差項は 1905 年に彼自身により $O(\log T)$ に改良され，Riemann の主張（と思われる）の形になった．ちなみに，これが $o(\log T)$ になるかどうかが Riemann 予想と直結しているのである．

●文献

［1］ 足立恒雄：『フェルマーの大定理』（日本評論社，1984）．
　　『フェルマーを読む』（日本評論社，1986）．

［2］ Bachmann, P.: Die Analytische Zahlentheorie (Teubner, 1894 : Johnson reprint, 1968).

［3］ Chebyshev, P. L.: Theorie der Kongruenzen (Kaiserlichen Akad. der Wiss., St. Petersburg, 1849 : Chelsea reprint, 1972).

［4］ Chebyshev, P. L.: Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, Mémoires présentés à l'Academie Impériale des Sci. de St.-Pétersbourg par divers Savants et lus dans ses Assemblées, 6 (1851), 141-157.

24） Möbius 関数 $\mu(n)$ を用いれば，

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}})$$

と漸近展開される．

[5]　Dirichlet, P. G. L.: Vorlesungen über Zahlentheorie (Friedrich Vieweg & Sohn, 1894 (Dedekind 編集): 邦訳『ディリクレ／デデキント整数論講義』現代数学の系譜 5, 酒井孝一訳, 共立出版, 1970).

[6]　Edwards, H. M.: Riemann's Zeta Function (Academic Press, 1974).

[7]　Hadamard, J.: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Journal de Math. p. et appl., 8 (1892), 101-186 = Thèse, Paris (1892).

[8]　Hadamard, J.: Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal de Math. p. et appl., 9 (1893) 171-215.

[9]　Hadamard, J.: Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bulletin de la Société math. de France, 24 (1896), 199-220.

[10]　Hardy, G. H. & Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, Math. Zeit., 10 (1921), 283-317.

[11]　鹿野健:「英国学派の数論――Hardy と Littlewood の世界」(『現代数学のあゆみ 3』数学セミナー増刊, 日本評論社, 1990)

[12]　von Koch, H.: Sur la distribution des nombres premiers, Acta Math., 24 (1901), 159-182.

[13]　Landau, E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (Teubner, 1909: Dover reprint, 1953).

[14]　Landau, E.: Collected Works, vol. 1～7 (Thales Verl, 1986).

[15]　Littlewood, J. E.: Sur la distribution des nombres premiers, Comptes Rendus, Paris 158 (1914), 1869-1872.

[16]　Littlewood, J. E.: A Mathematician's Miscelany (Methuen, 1952; 邦訳『リトルウッドの数学スクランブル』金光滋訳, 近代科学社, 1990).

[17]　von Mangoldt, H.: Zu Riemanns Abhandlung "Ueber die

Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Journal f. d. r. u. angew. Math., 114 (1895), 255-305.

[18] Nielsen, N.: Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten (Teubner, 1906; Chelsea reprint, 1965).

[19] Riemann, B. (Weber, H. 編): Gesammelte Math. Werke (Teubner, 第2版 1892; Dover reprint, 1953). なお，この新版が R. Narasimhan 編の下，Springer 社と Teubner 社の共同出版として最近出た (1990). これには，Riemann の論文に対する論説など数編と，Riemann から Weierstrass にあてた手紙 (1859年10月26日付) を含む.

[20] Schmidt, E.: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze, Math. Annalen, 57 (1903), 195-204.

[21] Siegel, C. L.: Ueber Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 2 (1932), 45-80 = C. L. Siegel Math. Abhandlungen, Band 1, 275-310.

[22] de la Vallée Poussin, Ch.: Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Première partie, Annales de la Société sci. de Bruxelles, 20 (1896), 183-256.

[第1章担当／鹿野 健]

●第 2 章

Riemann の原論文とその解説

§ 1. 原論文

与えられた数より小さい素数の個数について[1)]

Riemann

(『ベルリン学士院月報』1859 年 11 月)

学士院が私を通信会員として迎え入れてくださいました栄誉に感謝の意を表すとともに，与えられたこの機会を利用して速やかに素数の頻度に関する研究を報告することが最も適切であると信じます．Gauss や Dirichlet が長い間興味を持っていたように，恐らくこの主題はここでの報告として決して不適当でないと思われます．

さて，この研究の出発点として私に役に立ったのは，すべての素数 p とすべての自然数 n について，積公式

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\Sigma\frac{1}{n^s}$$

が成立するというオイラーの与えた注意である．この両辺が収束

するときに限り，これで表わせる複素変数 s の関数を私は $\zeta(s)$ で表わすことにする[2)]．s の実部が1より大きいときに限りこの両辺は収束し，さらにどのような s にも成立するこの関数の表示が容易に見つけられる[3)]．等式

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

を応用して，まず

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1} \quad {}^{4)}$$

が得られる．そこで積分

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1} \quad {}^{5)}$$

を考察する．ここで，この積分路は0は含むが積分記号内の関数の0以外の不連続点をその内部に含まないような領域の周囲を正の向きに $+\infty$ から $+\infty$ まで動くものとする[6)]．すると，それは積分

$$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

に等しいことが容易にわかる．ただし，多価関数

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$$

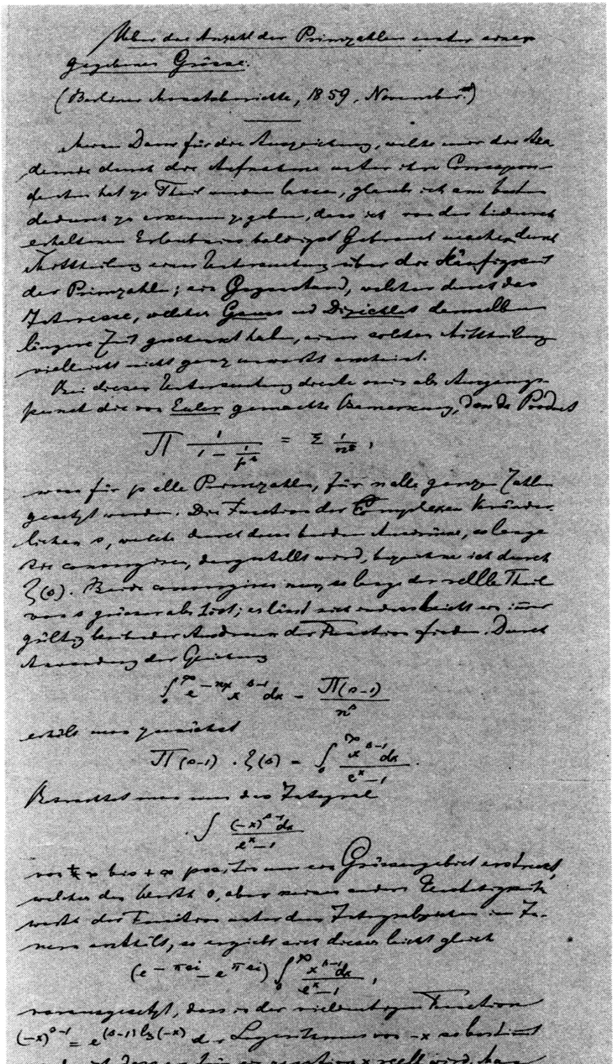
については $-x$ の対数は負の数 x について実数の値をとるものとする[7)]．それで，

$$2\sin \pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

が得られる．ここでこの積分は上に述べた意味とする．

この等式はすべての複素数 s についての $\zeta(s)$ の値を与えており，そしてまた，$\zeta(s)$ が一価関数で，$s=1$ を除いたすべての有限の s に対して有限であり，また s が負の偶数に等しいときに0になることを示している[8)]．

s の実部が負のとき，その積分は積分路が与えられた領域を正



Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Berliner Monatsberichte, 1859, November)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

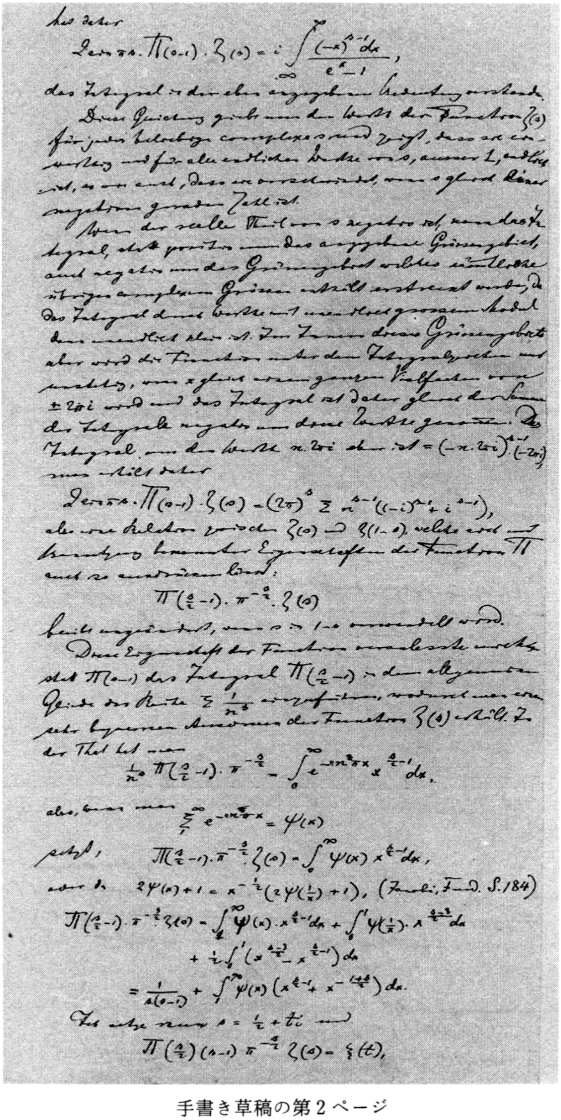
$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man

手書き草稿の第1ページ



手書き草稿の第2ページ

の向きで回るのでなく，その領域以外からなる領域を負の向きに回っているとも見なすことができる[9)]．なぜなら，積分路が無限に大きくなるとその積分は無限に小さくなるからである．x が $\pm 2\pi i$ の整数倍のときに限りその積分記号内の関数はこの領域の内部で連続でない．したがって，この積分はその各点を負の向きに回る積分の和になる．$s=n2\pi i$ の周りの積分の値は $(-n2\pi i)^{s-1}\cdot(-2\pi i)$ であるから，

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\,\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1})$$

が得られ[10)]，それで $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の関係が得られる．つまり，関数 Π についてのよく知られた性質を使うことにより，

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

は s が $1-s$ に変わっても不変であるということができる[11)]．

この関数の性質がきっかけとなって，私は級数 $\sum\frac{1}{n^s}$ の一般項において $\Pi(s-1)$ の代わりに積分 $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ を導入した．それによって関数 $\zeta(s)$ の非常に都合のよい表示が得られるのである．実際，

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx \quad {}^{12)}$$

が成立するので，

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x) \quad {}^{13)}$$

と置くと，

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty\psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

となり，さらに

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)$$

(Jacobi, Fund. p. 184) [14)]

であるから[15)]，

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

$$= \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx$$

となる[16]．

さて，$s = 1/2+it$ として[17]

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t)$$

と置くと，

$$\xi(t) = \frac{1}{2}-\left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

となり，そしてまた

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx \qquad ^{18)}$$

ともなる．

この関数はすべての有限の t について有限であり，そして非常に速く収束する tt の巾級数に展開される．実部が 1 より大きい複素数 s について

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$$

は有限であり，そしてまた，$\xi(t)$ の他の因子の対数についても同じことが成立するから，t の虚部が $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にあるときに限り関数 $\xi(t)$ は 0 になることができる[19]．$\xi(t) = 0$ の根でその実部が 0 から T までの間にあるものの個数はおよそ

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

である[20]．なぜなら，虚部が $\frac{1}{2}i$ から $-\frac{1}{2}i$ の間にあり，実部が 0 から T までにある複素数 t の全体のなす領域を正の向きに回る

積分 $\int d\log\xi(t)$ の値は（大きさ $\frac{1}{T}$ 程度の部分を除いて）[21] $(T\log\frac{T}{2\pi}-T)i$ に等しく，そしてこの積分はこの領域での $\xi(t)=0$ の根の個数と $2\pi i$ の積に等しいからである．実際，この領域内にほぼこれと同じくらい多くの実根があって[22]，しかもそれらの根がすべて実根であることはきわめて確からしいのである[23]．もちろん，このことについての厳密な証明を得ることが望ましい．私は少しばかり粗雑で成果のでなかった試みの後に，差し当たりこの証明には手をつけないでおくことにした．なぜなら，以下の私の研究の目的にはなくてもよいと思えたからである．

方程式 $\xi(\alpha)=0$ の任意の根を α で表わすと，$\log\xi(t)$ は

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0) \qquad {}^{24)}$$

と表わせる[25]．なぜなら，大きさ t の根の密度は t と共に高々 $\log\frac{t}{2\pi}$ だけの大きさで大きくなるから，この表示の式は収束し，そして t が無限に大きくなるときせいぜい $t\log t$ の大きさで無限に大きくなる．この式は $\log\xi(t)$ と比較して tt の関数の分だけ異なる．この関数[26]は有限の t について連続した有限の値をとり，tt で割って t を無限に大きくしたとき限りなく小さくなる．よって，この差は定数で，その値は $t=0$ を代入することによって決められる[27]．

これらの補助手段によって x より小さい素数の個数を決めることができるのである．

x が素数に等しくないときこの x より小さい素数の個数を $F(x)$ とし，x が素数のときさらに $\frac{1}{2}$ だけ大きくする．それで，$F(x)$ の値が飛んで変わる x では

$$F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

となる[28]．

さて，

$$\log \zeta(s) = -\sum \log(1-p^{-s})$$
$$= \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots\cdots$$

において $s\int_p^\infty x^{-s-1}dx$ を p^{-s} に，$s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx$ を p^{-2s} に，……と代入すると

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx$$

が得られる．ただし

$$F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots\cdots$$

を $f(x)$ で表わす．

この等式は，s の値が $a>1$ となるすべての複素数 $a+bi$ に対して成立する．ところで，この範囲で等式

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)x^{-s}d\log x$$

が成立するとき，Fourier の定理によって関数 h を関数 g で表わすことができる[29]．この等式は，$h(x)$ が実数値をとるとき，

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b)$$

と置くと，次のように分解される．

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

この両方の方程式に

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))db$$

をかけて，$-\infty$から$+\infty$まで積分すると，両方ともそれらの右辺は Fourier の定理により $\pi h(y)y^{-a}$ となる[30]．それで，両方の等式を加えて iy^a をかけると

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds$$

が得られる．ここでこの積分は s の実部を一定として定義され

る[31]．

この積分は，$h(y)$ の値が飛ぶような y ではその前後の y についての関数 h の値の真ん中の値をとることを示している．先に与えたその決め方から関数 $f(x)$ も同じ性質を持つから，いつでも

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}y^{s}ds$$

が成立する．

そこで，$\log\zeta$ のところに前に得ておいた表示式

$$\frac{s}{2}\log\pi-\log(s-1)-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)$$
$$+\sum^{\alpha}\log\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2}}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0)$$

に代入することができる．しかし，この式における個々の項の積分は，積分区間を無限に拡げると収束しないかもしれないので，前もってこの等式を部分積分法によって，

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^{s}ds$$

と変形しておくと具合がよい．

$m=\infty$ として

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)=\lim\left(\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac{s}{2}\log m\right)$$ [32]

だから

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds}=\sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds}$$

となる．よって，このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^{s}ds=\log\xi(0)$$

を例外として，$f(x)$ の表示のすべての項が

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds$$

の形をしていることがわかる．

ところで，

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

であって，そして，s の実部が β の実部より大きいとき，β の実部が負であるか正であるかによって

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int_\infty^x x^{\beta-1}dx$$

あるいは

$$=\int_0^x x^{\beta-1}dx$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds\\&\quad=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds\\&\quad=\int_\infty^x\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+(\text{定数})\qquad(\text{第一の場合})\end{aligned}$$

そして

$$=\int_0^x\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+(\text{定数})\qquad(\text{第二の場合})$$

となる．

第一の場合ではその積分の定数は β の実部を負の無限大にすることによって決められる．第二の場合においてこの 0 から x までの積分は，積分路を正の向きの弧とするか，あるいは負の向きの弧にするかによって $2\pi i$ だけ異なった値をとる[33]．そして正の向きの弧のとき β の i の係数を正の無限大にし，負の向きの弧のときにはこの係数を負の無限大にすると，この積分はどちらの

積分路でも限りなく小さくなる．このことからこの積分の定数が消えるようにするには左辺の $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ の値をどうとればよいかが決まる[34]．

これらの値を $f(x)$ の表示式に代入して

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum{}^{\alpha}(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0)$$ [35]

が得られる[36]．ただし，α に関する和 $\sum^{\alpha}$ では方程式 $\xi(t)=0$ のすべての正の（あるいは，その実部が正の）根がその大きさの順序で並べられているものとする．関数 ξ を詳しく調べることによって，この順序で定義された級数

$$\sum(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))\log x$$

の値は，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds} x^s ds$$

において b を無限に大きくした極限値と一致することが容易に示される[37]．しかし，順序を変えることによって，それは任意の実数の値をとることができる[38]．

関係式

$$f(x) = \sum\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$$

の反転としてできる等式

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f(x^{\frac{1}{m}})$$

によって $f(x)$ から $F(x)$ が見出せる．この級数で m は1以外の平方数で割れない自然数を動き，μ は m の素因数の個数を示すものとする[39]．

和 $\sum^{\alpha}$ を有限個の項に制限すると，$f(x)$ を表示する式の導関

数，あるいは，x が大きくなるにつれて非常に速く減少する部分をそれより除いた

$$\frac{1}{\log x}-2\sum^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)x^{-\frac{1}{2}}}{\log x} \quad {}^{40)}$$

は数 x について『素数の密度』+『素数の平方の密度の 1/2』+『素数の 3 乗の密度の 1/3』+ 等々の近似的な表示を与えている．

これによって，よく知られた近似式 $F(x) = \mathrm{Li}(x)$ は位数 $x^{1/2}$ の大きさを除いたときに限り正しいが[41]，それでもいくらかおおまかな評価を与えている．なぜなら，$F(x)$ の表示に現れる周期的でない項は[42]，x とともに無限に大きくならない量を除いても，

$$\mathrm{Li}(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{5}})$$
$$+\frac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{6}})-\frac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{7}})+\cdots\cdots$$

であるからである[43]．

実際，Gauss と Goldschmidt によって $x = 3{,}000{,}000$ までなされた，x より小さい素数の個数と $\mathrm{Li}(x)$ の比較によれば，この個数の方が最初の 100,000 番目まで常に $\mathrm{Li}(x)$ より小さいことが判明しているし，しかも $\mathrm{Li}(x)$ とこの個数の差は変動をともないながら x とともに次第に増大している[44]．周期的な項に依存してできる素数の各所の疎密もまた，その規則性までは注意が払われなかっただろうが，これまで数え上げの際には注目されていたのである．将来の新しい数え上げ方において，この素数の密度の表示に含まれる個々の周期的な項の影響を追求することは興味のあることになるかも知れない．最初の 100 個の素数においてすでに平均して $\mathrm{Li}(x)+\log\xi(0)$ に明らかに一致していると認められる関数 $f(x)$ の方が $F(x)$ よりも規則的な動きをしていると思われるのである．

［訳／平林幹人］

*　　　　*

訳者注釈

1)　この論文はWeberが編集したRiemann全集に載っている．最近この全集が再販された：

BERNHART RIEMANN; GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE, WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS UND NACHTRÄGE, Collected Papers, (ed.) R. Narasimhan, Spriger Verlag-BSG B. G. Verlagsgesellschaft (1990)

この新版は旧版の内容をそのままにして，さらにRiemannからWeierstrassへの手紙の草案，Siegelの論文（§1, [21]）などの他にRiemannの残した書簡，講義録などの行方を調べたE. Neuenschwanderの論文が追加されている．§2.「RiemannからWeierstrassへの手紙」などを参照のこと．

2)　この記号$\zeta(s)$はこの論文で最初に用いられ，その後一般に使われるようになった．

級数$\sum \frac{1}{n^s}$について，それまでEulerやDirichletはsを実数と考えていたが，Riemannはsを複素数までに拡張して考察の対象とした．

3)　一般に関数の定義域を拡げるにはWeierstrassが考えた解析接続が用いられる．

この後で示すように，Riemannは等式

$$2\sin \pi s \prod(s-1)\zeta(s) = i\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

で$\zeta(s)$の定義域を拡張している．

4)　ここで現われる関数$\prod(s)$は

$$\prod(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^s dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > -1)$$

で定義されたものである．つまり，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ で表わすと，

$$\Pi(s) = \Gamma(s+1)$$

となる．

5) もちろん，ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}dx = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}dx$$

となることを利用している．このような和 $\sum$ と積分 $\int$ の交換は一般には成立していない．このことについて，級数論あるいは関数論の適当な文献を参照してほしい．

6) この積分路は複素平面上で次の図 2.1 のように動くものとしている．

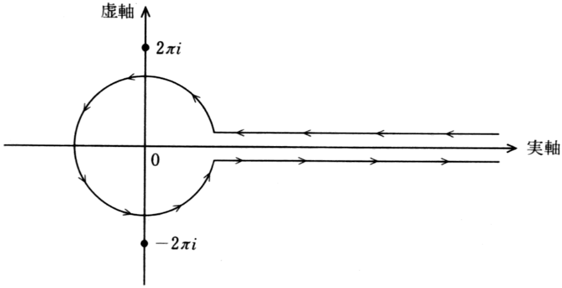


図 2.1

7) 複素数 z に対して $\log z$ は一意的に決まらない．上の図 2.1 において“実軸の上の矢印の直線”上の実数 x について $\log(-x) = \log x - \pi i$ とする．

8) Riemann 全集に次の注意が載っている．

関数 $\zeta(s)$ のこの性質は，公式

$$2\pi\zeta(s) = i\,\Pi(-s)\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

および

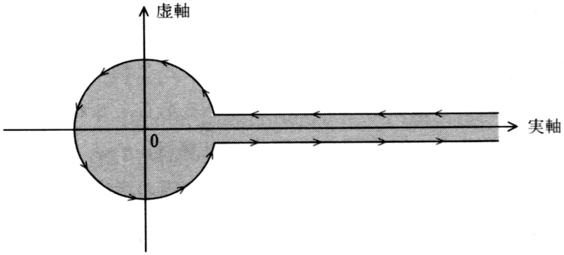


図 2.2

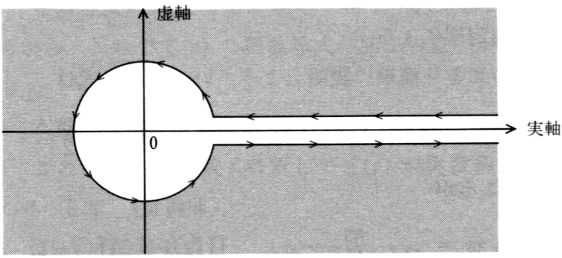


図 2.3

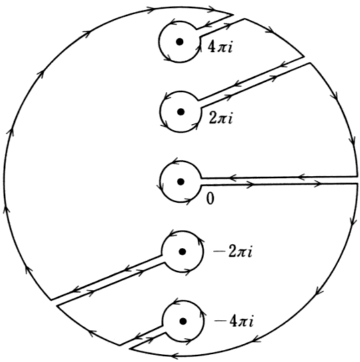


図 2.4

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}$$

を巾級数展開すると奇数巾だけからなることを利用して導ける．

9) 前の領域を図 2.2 のようにしているから，これ以外の領域とは図 2.3 をいう．この積分の実際の計算は，たとえば，図 2.4 のような積分路で積分し，その後，外側の円の半径を限りなく大きくするとよい．

このとき外側の円周上の積分は半径が大きくなるにつれて限りなく 0 に近づくのである．

10) 留数定理による．

11) このことを簡単に説明しよう．いま求めた式は

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s)=(2\pi)^s\zeta(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}$$

となる．ところが

$$\sin\pi s=\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)},\qquad \Pi(s)=s\,\Pi(s-1)$$

であるから上の式は

$$\frac{\zeta(s)}{\Pi(-s)}=(2\pi)^s\frac{\frac{s}{2}}{\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\Pi\left(-\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s)$$

となる．さらに Legendre の関係式

$$\Pi(s)=2^s\Pi\left(\frac{s}{2}\right)\Pi\left(\frac{s-1}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}}$$

の s を $-s$ に換えた式を上の式の左辺に代入して，目標とした式

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\Pi\left(\frac{1-s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

が導ける．この等式は $\zeta(s)$ の関数等式といわれる．Riemann はこの論文で別証明も与えている．Riemann 以後もいろいろな証明が与えられている．

12) ここで e の指数 $-nn\pi x$ は，もちろん，$-n^2\pi x$ である．

Riemann はこの後も，t^2 を tt，α^2 を $\alpha\alpha$，s^2 を ss などと書いている．

13)　現在，これはテータ級数（theta series）とよばれている．

14)　C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum（楕円関数の基本的な新しい理論），Jacobi 全集，第 1 巻 p. 235 にでている（Riemann 全集の脚注による）．

15)　この証明は，たとえば，Davenport [2] p. 61-64 に載っている．

16)　この等式の右辺は s の代わりに $1-s$ を代入しても不変であるから，これで $\zeta(s)$ の関数等式の第二の証明ができたことになる．

17)　この t は複素数である．

18)　この等式より実数 t に対して $\xi(t)$ が実数値をとることがわかる（3 章，§2 参照）．

19)　$\zeta(s)$ の関数等式

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Pi\left(\frac{1-s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

の右辺は $\mathrm{Re}(s)<0$ で正則であって，しかも 0 にならない．よって，$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ が $s=-2,-4,\cdots\cdots$ で極を持つから $\zeta(s)$ はここで 0 になることがすぐわかる．それで $s=-2,-4,\cdots\cdots$ は $\zeta(s)$ の自明な零点（trivial zeros）といわれる．

$\xi(t)$ の零点は，$s=\frac{1}{2}+it$ として，$\zeta(s)$ の自明でない零点と一致する．

20)　つまり，$\zeta(s)$ の零点 ρ で，$0<\mathrm{Re}\,\rho<1, 0<\mathrm{Im}\,\rho<T$ となるものの個数を $N(T)$ とすると，

$$N(T) \fallingdotseq \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

が成立するというのである．以下で Riemann は

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d\log\xi(t)$$

でそれを説明しているが，それは証明とみなされていない．この評価式の完全な証明を与えたのは von Mangoldt（1905 年）である．彼は誤差項を評価して

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

を得た．

21） Titchmarsh [6] はこの大きさ $\frac{1}{T}$ は $\log T$ のまちがいであろうと述べている．ところが，Edwards [3] はそうでなく，その“部分”は“相対誤差”の意味であろうと述べている．

22） $0<t<T$ となる $\xi(t)$ の零点，つまり $\mathrm{Re}\,\rho=\frac{1}{2}, 0<\mathrm{Im}\,\rho<T$ である $\zeta(s)$ の零点 ρ の個数 $N_0(T)$ について

$$N_0(T)\fallingdotseq\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

が成立すると，Riemann はここで主張している．ところが，彼の死後，手紙の草案が発見され，そこでこの主張は発表するほど十分に論証されていないことを認めている（Riemann 全集にある注意）．§2 の「手紙の草案」などを参照のこと．

23） これが，この本のテーマとなっている Riemann 予想を述べた部分である．$\zeta(s)$ の自明でない零点は Gram（1905 年）以来調べられていて，1983 年の J. van de Lune らの結果によると，虚部が正の自明でない零点は小さい順に数えて 300,000,000 番目まで確かに直線 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上にあって，しかもすべて単根である．

24） この和 $\sum$ は，$\mathrm{Re}\,s>0$ である $\xi(t)$ の零点 $t=\alpha$ をその虚部の小さい順に集めたという意味である．あとでこの意味で記号 $\sum^{\alpha}$ を用いている．また，一般に零点に関数する和 $\sum$，積 $\prod$ はそれぞれ重根についてその重複度だけ繰り返してその和，積をとっている．

25） 以下，

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\substack{\xi(\alpha)=0 \\ \mathrm{Re}(\alpha)>0}} \left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

を導こうというのである．

26)　この“関数”とは差

$$\left(\sum \log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)+\log \xi(0)\right)-\log \xi(t)$$

のことである．

27)　この説明も不十分である．この部分の厳密な証明は1893年に Hadamard によって与えられた．

28)　今日では一般に x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表わす．x が素数でないとき $F(x) = \pi(x)$，x が素数のとき

$$F(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi(x+\varepsilon)+\pi(x-\varepsilon)}{2}$$

とする．

29)　Riemann のいう Fourier の定理とは今日の Fourier の反転公式である．

30)　積分して得られるのは $\pi h y^{-a}$ でなく，$\pi y^{-a}(h(y)\pm h(1/y))$ である（Riemann 全集にある注意）．その和をとることで $\pm h(1/y)$ が消えて本文の式が導けるのである．

一般に

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^\infty h(x)\, x^{-s} d\log x \\ &= \int_0^\infty h(x)\, x^{-s-1} dx \end{aligned}$$

から

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\, y^s ds$$

は導けない．しかし，ここで問題にしている関数 $f(x)$ を $h(x)$ すればその反転公式を用いることができる．

31)　つまり，この積分路は直線 $s = a$ である．

32) もちろん，この右辺は

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac{s}{2}\log m\right)$$

の意味である．

33) 第二の場合，積分

$$\int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx$$

の被積分関数が $x=1$ を特異点とするから，その積分路を，たとえば，図 2.5 のようにしなければならない．Riemann はこの積分路を正の弧，あるいは，負の弧とよんでいる．

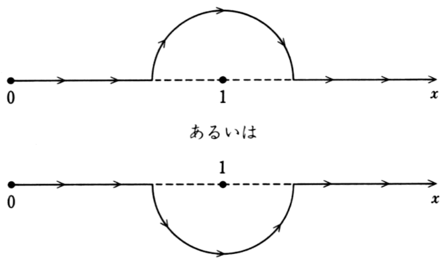


図 2.5

34) 対数関数の“枝”のとり方を問題にしている．

35) この $\log\xi(0)$ は $-\log 2$ の誤りであった．このことは Riemann の生前，すでに Genocchi によって指摘されていた．

この $f(x)$ の表示式がこの論文の Main Formula である．これは Riemann の素数式とよばれている．

36) この Riemann の証明は厳密ではなかったが，1895 年 von Mangoldt によって厳密な証明が与えられた．

Riemann の説明における“積分”は次のようになっている．

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log\xi(0)}{s}\right)\cdot x^s ds=\log\xi(0),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\log\Pi(s)\right)\cdot x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\log x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right)x^s ds$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\infty}^{x}\frac{x^{-2n-1}}{\log x}dx$$

$$= \int_x^{\infty}\frac{1}{\log x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n+1}}dx$$

$$= \int_x^{\infty}\frac{dx}{x(x^2-1)\log x},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log(s-1)}{s}\right)x^s ds = \mathrm{Li}(x).$$

ここで，

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{\log u}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{du}{\log u}\right)\qquad (x>1)$$

とする．さらに，$\mathrm{Li}(x^B)$ はこれを拡張して定義される（正確には，解析接続によって）．

37)　注釈22）で述べた手紙でRiemannはこの証明もまだ完全でないと記している（Riemann全集にある注意）．§2の「手紙の草案」など参照のこと．

後にこの証明はvon Mangoldtによってなされ，Riemannの素数式

$$f(x) = \mathrm{Li}(x)-\sum^{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$
$$+\int_x^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}-\log 2$$

が完成した．

38)　つまり，それは条件収束である．

39)　現在使われているMöbius関数

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^k & (m\text{が相異なる}k\text{個の素数の積のとき}) \\ 1 & (m=1\text{のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を用いると，

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} f(x^{\frac{1}{m}})$$

と表わせる．

40) 実は

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\log x} - 2 \sum_{\mathrm{Re}\,\alpha>0} \frac{\cos(\alpha \log x)}{x^{\frac{1}{2}} \log x} - \frac{1}{x(x^2-1)\log x} \qquad (x>1)$$

となっている．

41) 文字通りに解釈すると，

$$F(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

となるが，実は Riemann 予想と

$$F(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon \text{ は任意の正数})$$

が成立することとは同値である（von Koch, 1901 年）．

42) Riemann は $\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}\pm\alpha i})$ を周期的な項とよんでいる．

43) 素数の個数を近似する式 $\mathrm{Li}(x)$ と

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{m}})$$

を比較すると，$1<x<10^6$ において後者の方がすぐれている（Zagier ［7］）．

44) Riemann のいうように，確かに“小さい x”（たとえば，$1<x<10^{10}$）では $\pi(x)<\mathrm{Li}(x)$ となる．ところが，1955 年，Skewes は

$$10^{10^{10^{964}}}$$

以下のある x で逆に $\pi(x)>\mathrm{Li}(x)$ となっていることを示した．

*　　　　*

Riemann のこの論文ではゼータ関数の関数等式以降の内容の

証明が厳密でなかった．よって，Riemann以後この厳密な証明が多くの数学者によって試みられた．その内容を次の (1)—(9) に分けて，その結果をまとめてみよう．

(1)　$\zeta(s)$ は全複素平面に解析接続される．

(2)　$\zeta(s)$ は関数等式を満たす．

(3)　$\xi(t)$ の零点で，$-1/2 \leqq \mathrm{Im}\, t \leqq 1/2, 0 \leqq \mathrm{Re}\, t \leqq T$ なものの個数 $N(T)$ は

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

を満たす．

(4)　$\xi(t)$ の零点で，$\mathrm{Im}\, t = 1/2, 0 \leqq \mathrm{Re}\, t \leqq T$ なものの個数 $N_0(T)$ は

$$N_0(T) \to \infty \qquad (T \to \infty)$$

となる．

(5)　$N_0(T) = \dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{2\pi} - \dfrac{T}{2\pi} + O(\log T)$．

項目	最初に証明した人	その論文が発表された年
(1)	Riemann	1859
(2)	Riemann	1859
(3)	von Mangoldt	1905
(4)	Hardy	1914
(5)	未解決	
(6)	未解決	
(7)	Hadamard	1896
(8)	von Mangoldt	1895
(9)	Hadamard, de la Vallée-Poussin	1896

(1), (2) は Riemann のこの論文で最初に証明された．

(6)　(Riemann 予想)　　$N(T) = N_0(T)$　　$(T > 0)$.

(7)　(積公式)

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\mathrm{Re}\,\alpha>0} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

ただし，α は $\xi(t)$ の零点を動く．

(8)　(Riemann の素数式)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{\frac{1}{n}})$$

$$= \mathrm{Li}(x) - \sum_{\mathrm{Re}\,\alpha>0} (\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x} - \log 2.$$

(9)　(素数定理)　　$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

リーマンのこの論文の邦訳はすでに鹿児島大学の小柴洋一氏によってなされている（『鹿児島大学理科報告』第 24 号 1975 年）．訳者は小柴氏よりそのコピーをいただき，参照させてもらった．ここで同氏に深く感謝いたします．

§2.　Riemann から Weierstrass への手紙の草案

「　謹啓

何はさておき，ベルリンでの心温まるおもてなし，本当にありがとうございました．そこで私たちが経験したすべてのこと，とりわけ，先生との楽しい会話をしながらの食事のことが，これからも感謝の気持ちとともに思い出としていつまでも私の心に残るでしょう．

そのとき以来今日まで，私は素数の頻度についての研究に没頭してまいりましたが，しかるべき結果をいまだに得ておりません．Kronecker 先生がこの研究に興味を持たれていることを知らなかったなら私はこのことについてなにかをお伝えしようという気

にならなかったでありましょう．講義が始まると研究がやりにくくなりますので，私は学士院にこのことについてのささやかな論文をあえて提出いたしました．その論文は近いうちに先生と同僚の方々の審査を受けることになると思いますので，好意ある評価をお願いするものであります．

私の研究の結果は次のように要約されます：

$F(x)$ を x が素数でないときは x より小さい素数の個数とし，x 自身が素数のときはそれより $\frac{1}{2}$ だけ大きくする．そして $f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$ とおく．さて $\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-nn\pi x}$ を $\psi(x)$ で表わし，$4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx$ を $\xi(t)$ で表わす．そして α で方程式 $\xi(\alpha)=0$ の根を表わす．その α は恐らくすべてが実数であろうし，そうでないとしてもその虚数部は $\frac{1}{2}i$ と $-\frac{1}{2}i$ の間にある．すると

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum\nolimits^{\alpha}(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))$$
$$+\int_x^\infty \frac{1}{xx-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0)$$

となる．ここで和 $\sum^{\alpha}$ は方程式 $\xi(\alpha)=0$ の正の根（あるいは実数部分が正の根）α をその大きさの順にとったものとする．そして $F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f(x^{\frac{1}{m}})$ となる．ここで m は1以外の平方数を含まない整数を動き，μ は m の素因数の個数とする．

ところが私はこの証明を完全にできたわけではありません．それで，もうすぐ先生の手元に届きます私の論文をもう一度私に戻していただけるなら，このことに関して論文では単に触れただけであった次の2つの注意を追加したいと思います．

　0と T の間に約 $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ 個の方程式 $\xi(\alpha)=0$ の実の根がある．

そして

αの大きさの順にとった級数 $\sum^{\alpha}(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})+\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}))$ は

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\log\frac{\xi\left(\overline{s-\frac{1}{2}i}\right)}{\xi(0)}}{ds}x^s ds$$

での b が無限に大きくなったときの極限値に一致する.

この2つのことは関数 ξ の新しい展開から得られますが，私はこれを報告できるほどに十分に整理していません．他のすべてのことの正当性について，多くは非常に簡単な説明だけしか与えておりませんが，先生には容易におわかりいただけると思います．

学士院の月報に載せるにあたっては，この論文は，私の努力にもかかわらず，長すぎるし，また形式的にも十分でないので，月報にふさわしいように推敲しなければなりません．しかし，私の結果とそれに付随する二三の注意は月報のほんの片隅に載せてもよいと思うのです．私の論文に証明がないという非難があるとしても，その証明に必要な補足を私がすでに言及しているという，この正当性については公平に評価してほしいと思います．月報への私の論文提出について何かありましたら，わずかなことでもお知らせくだされば大変ありがたいのですが．この論文が月報に載らないなら，私はこれを『ジャーナル』に載せてもらうようにBorchardt教授にお願いするか，あるいはWeber教授の意見に従って，当地の学会誌の研究報告のために書き換えようと思います．もちろん，後者では嬉しくありません．というのは，他の仕事のために自由な時間を取っておきたいのです.」

(以下，多変数の周期関数の話なので翻訳を省略する)

Riemann全集の新版に次のNeuenschwanderの注意が載っている：

「このRiemannの手紙は1859年9月のベルリンでの訪問の直

後に書かれた．Riemannはそのとき，何人かの他のベルリンの数学者，たとえばB. L. Kroneckerなどに彼の有名な論文『与えられた数より小さい素数の個数について』ができたことを知らせている．

Riemannの Weierstrassへの手紙は2つのテーマに分けられる．その前半は，ここで初めて公にされたのであるが，素数の仕事の概要を書いている．後半ではWeierstassとベルリンで議論した多変数の周期関数について書いている．この手紙の後半はRiemannの死後Weierstrassによって『クレーレ・ジャーナル』で紹介され，そして引き続いてH. WeberによってRiemann全集で取り上げられた．

このRiemannのWeierstrassへの手紙のオリジナル，原物は現在も行方不明である．ゲッチンゲンにあるRiemannの遺稿の中にはこの手紙の下書きのように大抵の手紙の下書きが残っている．この手紙はその中から書き写したものである．」

●文献

［1］ Riemann, B.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

［2］ Davenport, H.: Multiplicative Number Theory (Second ed.) Springer Verlag, 1980.

［3］ Edwards, H. M.: Riemann Zeta Function, Academic Press, 1974.

［4］ Ivić, A.: The Riemann Zeta Function, Academic Press, 1985.

［5］ Landau, E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Chelsea, 1974 (First ed. 1909).

［6］ Titchmarsh, E. C.: The Theory of Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, 1951.

［7］ Zagier, D. B.: Die Ersten 50 Millionen Primzahlen, Beihefte

zur Zeitschrift, 15, 1977 (邦訳『数学セミナー』1985 年 8 月号, p. 38-48).

[第 2 章担当／平林幹人]

●第３章

ゼータ関数の零点に関する数値計算

§1. 計算の歴史

$s=\sigma+it$ を複素変数とするとき，Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (\sigma>1)$$

は，全平面に解析接続され，関数等式

$$(1) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

を満たす．そして $s=1$ で極を持つほかは全平面で正則な関数になる．$\zeta(s)$ は $\sigma\geqq1$ では零点を持たず，$\sigma\leqq0$ では，ガンマ関数の影響で $s=-2,-4,\cdots,-2n,\cdots\cdots$ が零点になる．その他の零点は $0<\sigma<1$ の領域（critical strip）にあるが，それらがすべて $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上にあるであろうというのが Riemann 予想である．Riemann がなぜこのような予想に到達したかは，いろいろ議論のあるところであるが，彼自身，$\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上の零点のいくつかを実際に数値計算で求め確認してみたものと思われる．critical strip における零点を実軸に近い方から順に正の方向に探査していったとき，15 番目までの零点はすべて $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の直線上にあり，

しかも単根であることを発表したのが Gram [5] であった．その方法は次の通りである．

1°．$\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上で複素数値をとる関数 $\zeta\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ に補正因子 $e^{i\vartheta(t)}$ をかけて実数値をとる関数 $Z(t)$ を作り（後述），その符号の変化を調べて，零点の場所をリストアップしていく．

2°．$\sigma=\dfrac{1}{2}+it$ の線上で $0<t<t_0$ までの零点が 1° の方法で N_0 個リストアップされたとする．このとき，$0<\sigma<1, 0<t<t_0$ の領域における零点の個数を重根はその重複度もこめて数えて $N(t_0)$ とすれば，$N(t_0)\leqq N_0$ であることを示す．

この 1°，2° により，$N(t_0)=N_0$ であり，$\zeta(s)$ の零点は，$0<\sigma<1, 0<t<t_0$ なる領域においてはすべて $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上にあり，しかも単根であることが示せる．零点の数値計算という分野における Gram の研究以後の人達の仕事も，この考え方を押し進めたものである．表 3.1 は“零点を実軸に近い方から順に正の方向に数え上げていったとき，n 番目までの零点がすべて $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上にあり，しかも単根であること”を示した人達とその手法の変遷を表にしたものである．

1956 年に Lehmer が行なった数値実験からは電子計算機が使われるようになり，その発展と相まって記録は飛躍的に伸びている．

“Riemann 予想が正しい”ということを，このような数値計算で証明することはもちろんできない．これらの結果はそれを限定的に検証しているにすぎない．しかしながら，Riemann 予想に矛盾する結果が数値実験の過程で出現することで，それが正しくないという反証が与えられるかもしれない（§ 8. 参照）．これらの可能性にも注意しながら，また，新しい計算法を模索しながら，この零点探査の記録は伸ばされていくものと思われる．

表3.1　ゼータ関数の零点計算の歴史

人　名	年	n	備　考
Riemann[17]	1859	*	リーマンの原論文
Gram[5]	1903	15	E-M和公式, テーラー展開
Backlund[1]	1914	79	E-M和公式 $N(t_0)$に対する積分表現の精密な評価
Hardy[6]	1914	*	$\sigma=\frac{1}{2}$の線上に無限個の零点があることを示した
Hutchinson[7]	1925	138	E-M和公式, Backlundの方法
Siegel[19]	1932	*	R-S公式
Titchmarsh, Comrie[21]	1935/6	1,041	E-M和公式, R-S公式
Turing[23]	1953	*	Turingの方法
Lehmer[11], [12]	1956	25,000	E-M和公式, R-S公式 Turingの方法 電子計算機使用
Meller[15]	1958	35,337	⋮
Lehman[9]	1966	250,000	⋮
Rosser, Yohe, Schoenfeld[18]	1968	3,500,000	⋮
Brent[2]	1979	81,000,001	
Brent, Lune, Riele, Winter[3]	1981	200,000,001	$0<t<81,702,130.19$
Lune, Riele[13]	1983	300,000,001	$0<t<119,590,809.282$
Lune, Riele, Winter[14]	1986	1,500,000,001	$0<t<545,439,823.215$

〔注〕E-M和公式≡オイラー-マクローリンの和公式
R-S公式≡リーマン-ジーゲル公式
*印は零点計算の手法に影響を与えた論文

§2. $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上での零点の探査

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{s(s-1)}{2}\zeta(s)$$

とすれば，関数等式 (1) は

$$(2)\qquad \xi(s)=\xi(1-s)$$

と書ける．また，$\zeta(s)$ の零点と $\xi(s)$ の零点は critical strip では一致するので，$\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上における零点すなわち

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=0$$

を満たす実数 t を求めるためには，

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=0$$

を満たす t を求めればよい．$\xi(s)$ は実軸上では実数値をとるので，関数論の鏡像原理（たとえば，竜沢 [20] 参照）より実軸に関して対称な点では互いに共役な値をとる．すなわち，

$$(3)\qquad \xi(\sigma+it)=\overline{\xi(\sigma-it)}$$

が成立する．これにより $\xi(s)$ の零点は実軸に関して対称に分布していることがわかるから，$\xi\left(\dfrac{1}{2}+it\right)=0$ の根 t は $t>0$ なるところで考えれば充分である．(2)，(3) より

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=\xi\left(1-\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)=\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)=\overline{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}$$

であるから，$\xi\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ は t が実数のとき実数値をとることがわかる．よって $\xi\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ の符号の変化を調べれば，$\zeta(s)$ の $\sigma=\dfrac{1}{2}$ の線上の零点を探査することができる．$\xi\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ の変動を調べるに際しては，これをもう少し変形して余分な因子を取り除いた関数に変更しておこう．

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

$$=\pi^{-\frac{1/2+it}{2}}\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}+it\right)\left(\frac{1}{2}+it-1\right)}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

$$= \pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\cdot\frac{-t^2-\frac{1}{4}}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

$$= \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{it}{2}\log\pi}e^{\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{-t^2-\frac{1}{4}}{2}$$

$$= \pi^{-\frac{1}{4}}e^{\mathrm{Re}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\cdot\frac{-t^2-\frac{1}{4}}{2}$$

$$\cdot e^{i\left\{\mathrm{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)-\frac{1}{2}t\log\pi\right\}}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

であるから，

$$A(t) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{\mathrm{Re}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\cdot\frac{-t^2-\frac{1}{4}}{2},$$

$$\vartheta(t) = \mathrm{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)-\frac{1}{2}t\log\pi,$$

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

と置けば

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = A(t)e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = A(t)Z(t)$$

であり，$Z(t)$ はもちろん実数値関数である．すべての実数 t に対して $A(t)<0$ であるから，$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の値の正負と $Z(t)$ の値の正負は反対になる．

以上のことから，$\sigma=\frac{1}{2}$ の線上における $\zeta(s)$ の零点を探査するためには，$Z(t)$ の値の符号の変化を調べればよいということになる．すなわち，“連続関数 $Z(t)$ に対して，$t_1 < t_2$ のとき，$Z(t_1)$ と $Z(t_2)$ が異なる符号を持てば，区間 (t_1, t_2) の中に $Z(\alpha)=0$ を満たす実数 α が少なくとも1つ存在する (図3.1)” という原理で零点のある場所を探査していくことができる．

関数 $\vartheta(t)$ は複素数値をとる関数 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ を実軸上に引きもどす役目をしているわけである．$Z(t)$ の値の計算，すなわち

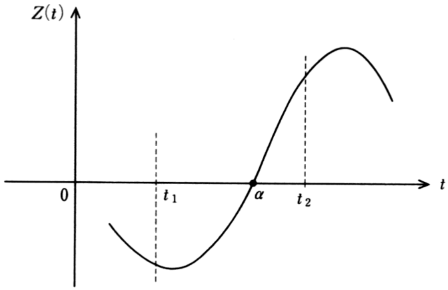


図3.1 $Z(t)$による零点の探査

$\vartheta(t)$, $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の値の数値計算には，次の節で説明する Euler-Maclaurin の和公式が使われる．

§ 3. Euler-Maclaurin の和公式

Eular-Maclaurin の和公式は，関数 $f(x)$ に関する和

$$S = \sum_{n=M}^{N} f(n)$$

を評価するための１つの手法である．M, N は正の整数とし，$N = \infty$ のときもこめて考えることにする．いま $f(x)$ のグラフが，たとえば，図 3.2 のようであるとすれば，S は斜線部分の面積を表わすから，それを $f(x)$ の M から N までの積分で近似しようと考えるのは自然であろう．

一般に，$f(x)$ が微分可能とするとき，部分積分法を使えば，

$$\int_M^N \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=M}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=M}^{N-1} \int_0^{1} \left(t-\frac{1}{2}\right) f'(n+t)\,dt$$

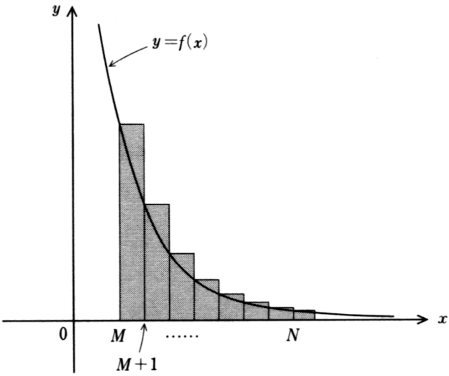


図3.2

$$= \sum_{n=M}^{N-1}\left\{\frac{1}{2}f(n+1)+\frac{1}{2}f(n)\right\}-\sum_{n=M}^{N-1}\int_0^1 f(n+t)\,dt$$

$$= \sum_{n=M}^{N} f(n)-\frac{1}{2}f(M)-\frac{1}{2}f(N)-\int_M^N f(x)\,dx$$

となる．ここで $[x]$ は x を超えない最大整数（Gauss 記号）を表わすものとする．よって次の Euler の和公式が成立する．

Euler の和公式

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(x)\,dx+\frac{1}{2}(f(M)+f(N))$$
$$+\int_M^N\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx.$$

この最後の項の積分は誤差項ともいうべきものであるが，この項に部分積分をくり返し用いて，さらに詳しく誤差を細分しようというのが Euler-Maclaurin の和公式である．

この公式を導くためには Bernoulli 数と Bernoulli 多項式が必要になるので，それを定義しておこう．

関数 $\dfrac{z}{e^z-1}$ を Maclaurin 展開して

$$\frac{z}{e^z-1}=B_0+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+\cdots\cdots$$

としたとき，その係数 $B_0, B_1, B_2, \cdots$ を Bernoulli 数という．$\dfrac{z}{e^z-1}+\dfrac{z}{2}$ は偶関数であるから，B_1 を除く奇数番目の Bernoulli 数は 0 である．それらは，

$$B_0=1,\qquad B_1=-\frac{1}{2},\qquad B_2=\frac{1}{6},\qquad B_4=-\frac{1}{30}$$

$$B_6=\frac{1}{42},\qquad B_8=-\frac{1}{30},\qquad B_{10}=\frac{5}{66},$$

$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\qquad \cdots\cdots$$

であり，

$$z=(e^z-1)\left(B_0+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\cdots\right)\left(B_0+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\cdots\cdots\right)$$

であるから

$$(4)\quad B_0+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0$$

という関係式が成立している．

Bernoulli 数を係数に含む n 次の多項式

$$B_n(x)=B_0x^n+\binom{n}{1}B_1x^{n-1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}x+B_n$$

を Bernoulli 多項式という[1]．それらは，

$$B_0(x)=1,\qquad B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

---

1) Bernoulli 多項式は，もともとは巾和を表現する多項式として導入されたのであるが，ここでは天下り式に Bernoulli 数，Bernoulli 多項式を定義した．

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1),$$

....

である.

Bernoulli 多項式と Bernoulli 数の間では，定義と (4) より

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n$$

が成立している．さらに，定義式を微分すれば，

(5)　$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$

という重要な性質が成立することがわかる.

このBernoulli 多項式を使えば，Euler の和公式の最終項の積分を次のように書き下すことができる．区間 $[M, N]$ で $f''(x)$ が存在するとすれば

$$\begin{aligned}
&\int_M^N \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx \\
&\quad = \sum_{n=M}^{N-1}\int_n^{n+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx \\
&\quad = \sum_{n=M}^{N-1}\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)f'(n+t)\,dt \\
&\quad = \sum_{n=M}^{N-1}\int_0^1 B_1(t)f'(n+t)\,dt \\
&\quad = \sum_{n=M}^{N-1}\left\{\left[\frac{B_2(t)}{2}f'(n+t)\right]_0^1 \right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^1 B_2(t)f''(n+t)\,dt\right\} \\
&\quad = -\frac{B_2(0)}{2}f'(M) + \frac{B_2(0)}{2}f'(N) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_M^N B_2(x-[x])f''(x)\,dx \\
&\quad = \left[\frac{B_2}{2}f'(x)\right]_M^N - \frac{1}{2}\int_M^N \bar{B}_2(x)f''(x)\,dx.
\end{aligned}$$

ただし，$\bar{B}_2(x) = B_2(x-[x])$ とする．さらに，この方法をまた残りの積分の項に適用するという具合に続け，$B_{2\nu+1} = 0$ に注意

し，$[M,N]$ で $f^{(2k+1)}(x)$ が存在するとすれば，次の公式が成立する．

Euler-Maclaurin の和公式

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(M)+f(N)) + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(x)\right]_M^N + R_{2k}.$$

ただし，

$$R_{2k} = \frac{1}{(2k+1)!}\int_M^N \overline{B}_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\,dx,$$

$$\overline{B}_{2k+1}(x) = B_{2k+1}(x-[x]).$$

いま，$\zeta(s)$ の $s=2$ のときの値の評価に，この公式を適用してみよう．$N=\infty$ とし，たとえば，$M=6, k=1$ とすれば，

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 1+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{5^2}+\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= 1+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{5^2}+\int_6^\infty \frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6^2} \\ &\quad +\frac{B_2}{2!}\left[\frac{-2}{x^3}\right]_6^\infty + R_2 \\ &= 1.6449382\cdots\cdots + R_2\end{aligned}$$

と計算できる．誤差項 R_2 の評価については，次節で詳しく解説するが，

$$(6) \quad |R_2| \leqq \left|\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot B_4}{4!\cdot 6^5}\right| = \frac{1}{30\times 6^5} = 0.00000428\cdots$$

と上からおさえられる（次節（11）式参照）．これより $\zeta(2)$ は 1.6449 と小数点以下 4 位まで正確に求められる．実は Euler によって $s=2m$（偶数）におけるゼータ関数の値を与える公式が求められており，

(7)　$\zeta(2m)=\dfrac{(2\pi)^{2m}(-1)^{m+1}B_{2m}}{2(2m)!}$

である[2)]．これによれば

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}=1.644934\cdots$$

であり，Euler-Maclaurin の和公式において $k=1$ とした近似式でさえも $\zeta(2)$ に対する非常に良い近似値を与えることがわかる．

§4.　$\zeta(s)$ の近似公式

s は1より大きい実数と仮定しよう．Euler-Maclaurin の和公式を使えば

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{\infty}\frac{1}{n^s}&=\int_M^{\infty}x^{-s}dx+\frac{1}{2}M^{-s}+\int_M^{\infty}\overline{B}_1(x)(-s)x^{-s-1}dx\\&=\frac{M^{1-s}}{s-1}+\frac{1}{2}M^{-s}+\sum_{j=1}^{k}\frac{B_{2j}}{(2j)!}M^{1-s-2j}\prod_{l=0}^{2k-2}(s+l)\\&\quad+R_{2k}\end{aligned}$$

が成立する．ここで，

$$R_{2k}=\frac{-s(s+1)\cdots\cdots(s+2k)}{(2k+1)!}\int_M^{\infty}\overline{B}_{2k+1}(x)x^{-s-2k-1}dx$$

である．はじめは s を実数と仮定したが，解析接続の考えに立てば $s=\sigma+it$ とするとき $\sigma>-2k$ なるすべての複素数 s に対しても上式が成立する．

よって，$M\geqq 2$ として

(8)　$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\sum_{n=1}^{M-1}\frac{1}{n^s}+\frac{M^{1-s}}{s-1}+\frac{1}{2}M^{-s}\\&\quad+\sum_{j=1}^{k}\frac{B_{2j}}{(2j)!}M^{1-s-2j}\prod_{l=0}^{2k-2}(s+l)+R_{2k}\end{aligned}$$

というゼータ関数に対する展開公式が成立する．

ここで，誤差項の評価を行なうときに必要な Bernoulli 多項式

2)　$s=2m+1$（奇数）のときの値 $\zeta(2m+1)$ については何も知られておらず，$\zeta(3)$ 以外は無理数か有理数かもわかっていない．

の性質について補足しておこう．

$B_1(1-x) = -B_1(x)$ であるが，一般に，

(9) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

が成立する．これは，帰納法を使って次のように証明することができる．(9) 式が $n=k$ まで成立しているものとすれば，$n=k+1$ のとき，(5) と仮定より

$$\{B_{k+1}(1-x)-(-1)^{k+1}B_{k+1}(x)\}'$$
$$= -(k+1)B_k(1-x)-(-1)^{k+1}(k+1)B_k(x) = 0$$

であるから，C をある定数として

$$B_{k+1}(1-x) = (-1)^{k+1}B_{k+1}(x)+C$$

と書ける．ここで $x=0$ と置けば，k が奇数のとき，

$$B_{k+1} = (-1)^{k+1}B_{k+1}+C = B_{k+1}+C$$

ゆえに，$C=0$ である．また，k が偶数のとき，

$$B_{k+1} = -B_{k+1}+C$$

であるが，$B_{k+1}=0$ であるから $C=0$ である．よって，$n=k+1$ のときにも成立する．ゆえに，すべての自然数 n について (9) 式が成立する．

(9) より $y=B_{2k+1}(x)$ のグラフは，点 $x=\frac{1}{2}$ に関して点対称であり，$x=0, \frac{1}{2}, 1$ で 0 になっていることがわかる．さらに，区間 $[0, 1]$ においては，これ以外に 0 になる点を持たない．なぜなら，

$$B_{2k+1}(x_0) = 0, \qquad 0<x_0<\frac{1}{2}$$

をみたす x_0 が存在するとすれば，区間 $[0, x_0]$ および区間 $[x_0, \frac{1}{2}]$ に平均値の定理を適用して

$$B_{2k}(\xi_1) = 0, \qquad 0<\xi_1<x_0,$$
$$B_{2k}(\xi_2) = 0, \qquad x_0<\xi_2<\frac{1}{2}$$

となる ξ_1, ξ_2 が存在する．さらに，区間 $[\xi_1, \xi_2]$ に平均値の定理を

用いれば，

$$B_{2k-1}(x_1)=0,\quad 0<x_1<\frac{1}{2}$$

となる x_1 が存在することになる．これをくり返せば

$$B_3(\xi)=0,\qquad 0<\xi<\frac{1}{2}$$

なる ξ が存在することになるが，

$$B_3(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

であるから，これは矛盾である．$[\frac{1}{2},1]$ の場合も同様の議論を行なえばよい．

$B_{2k+1}(x)$ の $[0,1]$ でのグラフは概略，図 3.3 の形であり，これを $[0,1]$ を 1 周期として周期関数に延長したものが，$y=\bar{B}_{2k+1}(x)$ のグラフである．また，$y=B_{2k}(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称で図 3.4 のようになる．

以上の準備のもとで，(8) 式における誤差項 R_{2k} の大きさを評価してみよう．

$$\{B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)\}'=-(2k+2)\bar{B}_{2k+1}(x)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}|R_{2k}|&=\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k)}{(2k+1)!}\int_M^\infty \bar{B}_{2k+1}(x)\,x^{-s-2k-1}dx\right|\\&=\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k+1)}{(2k+2)!}\int_M^\infty (B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x))\right.\\&\qquad\left.\cdot x^{-s-2k-2}dx\right|\\&\leqq\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k+1)}{(2k+2)!}\right|\int_M^\infty |B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)|\\&\qquad\cdot x^{-\sigma-2k-2}dx.\end{aligned}$$

ここで，

$$g(x)=B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)$$

と置くと，$g(0)=g(1)=0$ であり，$g'(x)=-(2k+2)\bar{B}_{2k+1}(x)$

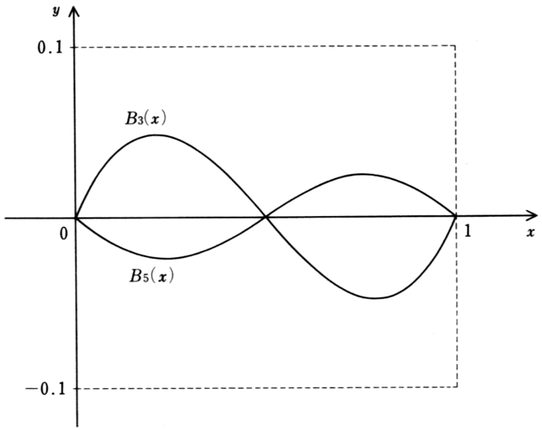


図 3.3　$y=B_{2k+1}(x)$ のグラフ

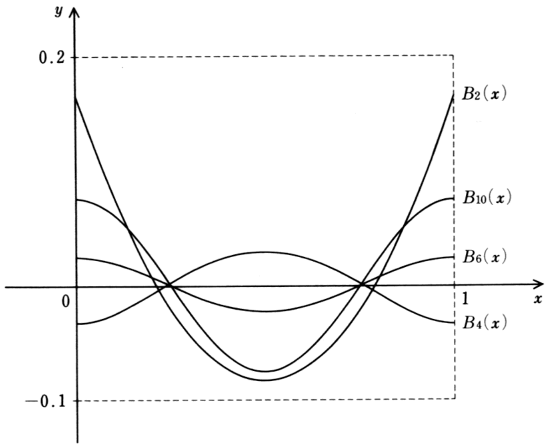


図 3.4　$y=B_{2k}(x)$ のグラフ

が開区間 $(0,1)$ においては $x=\dfrac{1}{2}$ でのみ 0 になることから，$g(x)$ の値の正負は区間 $[0,1]$ で一定の符号である．また，$\bar{B}_{2k+2}(x)=0$ が $[0,1]$ で解を持たないと仮定すれば，$y=B_{2k+3}(x)$ という関数を考えたとき，$y'=(2k+3)B_{2k+2}(x)$ の値は $[0,1]$ で一定の符号であるから，$y=B_{2k+3}(x)$ は単調関数になる．$B_{2k+3}(0)=0$ であり，それが $[0,1]$ で単調関数であるということは，$B_{2k+3}\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ に矛盾する．よって，$\bar{B}_{2k+2}(x)$ は $[0,1]$ で実際に零点を持つ．$\bar{B}_{2k+2}(x)$ が実際 0 になることがあり，$B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)$ が $[0,1]$ で一定の符号であるから，$B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)$ と B_{2k+2} は $[0,1]$ で同一の符号を持たねばならない．B_{2k+2} の符号は Euler の公式 (7) より $(-1)^k$ であるから

$$|B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)|=(-1)^k\{B_{2k+2}-\bar{B}_{2k+2}(x)\}$$

と書ける．よって，

$$(10)\quad |R_{2k}|\leqq\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k+1)}{(2k+2)!}\right||B_{2k+2}|\int_M^\infty x^{-\sigma-2k-2}dx$$
$$-\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k+1)}{(2k+2)!}\right|\int_M^\infty(-1)^k\bar{B}_{2k+2}(x)$$
$$\cdot x^{-\sigma-2k-2}dx.$$

右辺の 2 番目の項の積分を V とする．部分積分を 1 回行ない，その後，積分区間を分割すれば，

$$V=\frac{\sigma+2k+2}{2k+3}\int_M^\infty(-1)^k\bar{B}_{2k+3}(x)x^{-\sigma-2k-3}dx$$
$$=\frac{\sigma+2k+2}{2k+3}\sum_{l=0}^\infty\int_{M+\frac{l}{2}}^{M+\frac{1}{2}+\frac{l}{2}}(-1)^k\bar{B}_{2k+3}(x)x^{-\sigma-2k-3}dx$$

となる．$\bar{B}_{2k+3}(x)$ のグラフを思い起こせば，右辺の級数は交項級数であることがわかり，V の値の正負は，最初の項

$$\frac{\sigma+2k+2}{2k+3}\int_M^{M+\frac{1}{2}}(-1)^k\bar{B}_{2k+3}(x)x^{-\sigma-2k-3}dx$$

の正負と一致する．関数 $(-1)^k\bar{B}_{2k+3}(x)$ は $x=M$ のとき 0 となり，そのときの微分係数は $(-1)^k(2k+3)B_{2k+2}>0$ で，かつ，

$[M, M+\frac{1}{2}]$ では 0 にならないので，この区間で正の値をとる．ゆえに，被積分関数は積分区間で正の値をとり，$\sigma>-2k$ ならば $V>0$ であることがわかる．よって，(10) の 2 番目の項を評価式から除くことにすれば，

$$(11)\quad |R_{2k}| \leqq \left|\frac{s+2k+1}{\sigma+2k+1}\right|\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k)}{(2k+2)!}\right||B_{2k+2}| \cdot M^{-\sigma-2k-1}$$

という簡便な評価式が得られる．右辺は展開式 (8) において，k を $k+1$ に伸ばしたときの最終項に $\left|\frac{s+2k+1}{\sigma+2k+1}\right|$ 倍したものになっていることに注意しよう．前節の誤差評価式 (6) は (11) 式において $s=\sigma=2, k=1, M=6$ とした特別な場合である．

それでは，$s=\frac{1}{2}+it$ のとき $\zeta(s)$ の値を望ましい精度で計算するためには，M はどれくらいの大きさにとる必要があるだろうか．Euler の公式 (7) より

$$\begin{aligned}|B_{2k+2}| &= \left|\frac{\zeta(2k+2)\cdot 2(2k+2)!}{(2\pi)^{2k+2}}\right| \\ &\leqq \frac{2\zeta(2)(2k+2)}{(2\pi)^{2k+2}}\end{aligned}$$

であるから，$C=C(k)$を k にのみ依存して決まる定数とすれば

$$\begin{aligned}|R_{2k}| &\leqq \left|\frac{s+2k+1}{\frac{1}{2}+2k+1}\right|\left|\frac{s(s+1)\cdots\cdots(s+2k)}{(2\pi)^{2k+2}}\right|M^{-\frac{1}{2}-2k-1} \\ &\leqq C\left(\frac{t}{2\pi M}\right)^{2k+2}\cdot\sqrt{M}\end{aligned}$$

となる．この事実は，M の大きさについて $M \geqq \frac{t}{2\pi}$ にとる必要があることを示唆している．

これより，Euler-Maclaurin の和公式による $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の値の数値計算においては，t が大きくなるのに比例して M を大きくとらねばならず，これがこの方法の弱点の 1 つとなっている．これを補う方法が §7 で述べる Riemann-Siegel の公式である．

§5. $\vartheta(t)$ の近似公式

ここでは§2で定義した関数

$$\vartheta(t)=\operatorname{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}t\log\pi$$

の値を計算するための近似公式を求めてみよう．

まず $\log\Gamma(s)$ の近似公式について考える．s を正の実変数とすれば，ガンマ関数の Gauss の公式

$$\Gamma(s)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!N^s}{s(s+1)\cdots\cdots(s+N)}$$

より，

$$\log\Gamma(s)=\lim_{N\to\infty}\left\{s\log N+\sum_{n=1}^{N}\log n-\sum_{k=0}^{N}\log(s+k)\right\}$$

である．ここで Euler の和公式を用いれば，

$$\begin{aligned}\log\Gamma(s)=\lim_{N\to\infty}&\left\{s\log N+\int_1^N\log x\,dx+\frac{1}{2}\log N\right.\\&+\int_1^N\frac{\bar{B}_1(x)}{x}dx-\int_0^N\log(s+x)\,dx\\&\left.-\frac{1}{2}(\log s+\log(s+N))-\int_0^N\frac{\bar{B}_1(x)}{s+x}dx\right\}\\=&\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s+1+\int_1^\infty\frac{\bar{B}_1(x)}{x}dx\\&-\int_0^\infty\frac{\bar{B}_1(x)}{s+x}dx-s\end{aligned}$$

となる．

$$1+\int_1^\infty\frac{\bar{B}_1(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

であること（竜沢 [20], 132ページ参照）に注意すれば，

$$\begin{aligned}&\log\Gamma(s)\\&\quad=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+\frac{1}{2}\log 2\pi-\int_0^\infty\frac{\bar{B}_1(x)}{s+x}dx\end{aligned}$$

が得られる．最終項の積分を何回か部分積分して

(12)　$$\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+\frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$+\frac{B_2}{2\cdot s}+\frac{B_4}{4\cdot 3\cdot s^3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)\cdot s^{2k-1}}+R_{2k},$$

$$R_{2k}=-\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{2k+1}(x)}{(2k+1)(s+x)^{2k+1}}dx$$

と書けるが，これがStirling級数といわれる展開公式である．

はじめに s は実変数という制限を付けたが，解析接続の考えに立てば，(12) は $\mathrm{Re}\, s>0$ なる複素数に対しても成立するとしてよい．

この展開公式より

$$\begin{aligned}
\vartheta(t)&=\mathrm{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}t\log\pi\\
&=\frac{t}{2}\mathrm{Re}\log\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\\
&\quad-\frac{1}{4}\mathrm{Im}\log\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)-\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\log\pi\\
&\quad+\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=1}^{k}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)^{2n-1}}+R_{2k}\right\}\\
&=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2t}\right)^2}\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{t}{2}}\right)\right)-\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\log\pi\\
&\quad+\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=1}^{k}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)^{2n-1}}+R_{2k}\right\}
\end{aligned}$$

であるが，ゼータ関数の場合と同様な論法で誤差項 R_{2k} を評価すれば，

$$|R_{2k}|<\left|\frac{2^{k+1}B_{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)^{2k+1}}\right|<\frac{2^k(2k)!}{\pi^{2k+2}t^{2k+1}}$$

が成立する．展開式において，特に $k=2$ とすれば，

$$\vartheta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{t}{4}\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2t}\right)-\frac{1}{6t}\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)^{-1}$$
$$-\frac{1}{45t^3}\left(1-\frac{3}{4t^2}\right)\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)^{-3}+\mathrm{Im}\,R_4$$

と表わされる．関数 $\log(1+x)$, $\tan^{-1}x$, $(1+x)^{\alpha}$ の Maclaurin 展開式を利用すれば，

$$\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)=\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2\times16\times t^4}+\frac{1}{3\times4^3\times t^6}-\cdots\cdots$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2t}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{3\times2^3\times t^3}+\frac{1}{5\times2^5\times t^5}-\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)^{-1}=1-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{16t^4}-\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)^{-3}=1-\frac{3}{4t^2}+\frac{3}{16t^4}-\cdots\cdots$$

であり，誤差評価は

$$|R_4|<\frac{4\times4!}{\pi^6\times t^5}$$

であるから，

$$\vartheta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}+r(t), \tag{13}$$

$$|r(t)|<\frac{1}{t^5}$$

と表わされる．これより，t が大きいときは

$$\vartheta(t)\sim\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}$$

という近似式で充分精度の良い結果が得られることがわかる．

§6. t が小さいときの $Z(t)$ の値の計算と $N(t)$ の数え上げの方法

一応，前節までで $Z(t)$ の値を計算するための準備を整えたので，t が比較的小さい場合にこの値を求めてみよう．

たとえば $Z(14)$ の値を計算してみる．(8) 式において $s=\frac{1}{2}+14i, M=6, k=2$ とすれば

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^s}+\frac{6^{1-s}}{s-1}+\frac{1}{2}\times 6^{-s}+\frac{B_2}{2!}\times 6^{-s-1}\times s$$
$$+\frac{B_4}{4!}\times 6^{-s-3}\times s(s+1)(s+2)+R_4$$
$$=S(1)+S(2)+S(3)+B(1)+B(2)+R_4$$

と書けて，各項を計算すれば

$$S(1)=-0.185736+(-0.025418)i$$
$$S(2)=0.002171+(-0.174838)i$$
$$S(3)=0.203887+0.009817i$$
$$B(1)=-0.000986+0.079425i$$
$$B(2)=0.001971+0.007094i$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+14i\right)\sim 0.021307+(-0.103920)i$$

となり，まず $\zeta\left(\frac{1}{2}+14i\right)$ に対する近似値が得られる．

$$|R_4|<\left|\frac{\frac{1}{2}+14i+5}{\frac{1}{2}+4+1}\right|\left|\frac{B_6}{6!}\times 6^{-s-5}\right.$$
$$\left.\times s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)\right|=0.0028\cdots$$

であるから，この近似値は小数点以下 2 ケタまで正しいことがわかる．一方 (13) 式より

$$\vartheta(14)\sim\frac{14}{2}\log\frac{14}{2\pi}-\frac{14}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48\times 14}+\frac{7}{5760\times 14^3}$$
$$=-1.78295\cdots$$

であるから

$$Z(14)=e^{i\vartheta(14)}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}+14i\right)\sim -0.106\cdots$$

という近似値が得られる．よって，$Z(14)<0$ であることがわかる．

同様にして $t=14.10$ から $t=14.20$ までの $Z(t)$ の値を精度を上げるために $M=8, k=4$ として計算してみると表3.2のようになる．この計算から，14.13 と 14.14 の間に $Z(t)$ の零点が少なくとも1つ存在することがわかる．

$Z(t)$ の値を $t=0$ から $t=50$ まで，0.1 の間隔で計算し，滑らかな曲線で結んでグラフにしたものが図3.5である．図は $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ が $0<t\leqq 50$ の範囲で少なくとも10個の零点を持つことを示している．

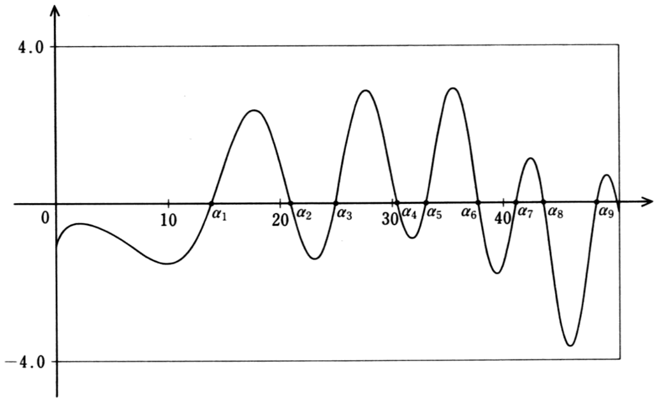


図3.5　$Z(t)\ (0\leqq t\leqq 50)$ のグラフ

“critical strip において実軸に近いところから数えて n 番目までの零点がすべて $\sigma=\frac{1}{2}$ の直線上にあり，しかも単根である”という命題を $H(n)$ と書くことにしよう．Gram は上に述べた

表 3.2

t	$\vartheta(t)$	Re $\zeta(\frac{1}{2}+it)$	Im $\zeta(\frac{1}{2}+it)$
14.100	−1.74272	0.00470	−0.02706
14.110	−1.73868	0.00327	−0.01930
14.120	−1.73463	0.00190	−0.01152
14.130	−1.73059	0.00060	−0.00370
14.140	−1.72653	−0.00064	0.00413
14.150	−1.72248	−0.00183	0.01198
14.160	−1.71842	−0.00296	0.01987
14.170	−1.71435	−0.00402	0.02777
14.180	−1.71029	−0.00501	0.03569
14.190	−1.70621	−0.00594	0.04363
14.200	−1.70214	−0.00682	0.05159

方法で，直線 $\sigma=\frac{1}{2}, 0<t<66$ の上で少なくとも 15 個の $\zeta(s)$ の零点があることを示した．さらに彼は $\log\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の Taylor 展開を利用して $0<\sigma<1$，$0<t<66$ で 15 個以上の零点がないこと，すなわち $N(66)\leqq 15$ を示し，$H(15)$ を証明した．これらの零点は図 3.5 に示したように

$$\alpha_1=14.13\cdots,\qquad \alpha_2=21.02\cdots,$$
$$\alpha_3=25.01\cdots,\qquad \alpha_4=30.42\cdots,$$
$$\alpha_5=32.93\cdots,\qquad \alpha_6=37.58\cdots,\qquad \cdots\cdots$$

などである．

Gram のこの $N(T)$ に対する上からの評価法は，T が大きくなる場合には簡単に拡張できない方法であった．そこで Backlund は $N(T)$ を評価する次のような新しい方法を導入した．それは $N(T)$ の積分表現を考えることから出発する．

R を $2, 2+iT, -1+iT, -1$ を頂点とする四辺形とする．R の境界を ∂R とし，方向は正の向きを持たせることとすれば，関数

$Z(t)$	R_8
−0.02746	0.0000037458
−0.01958	0.0000037690
−0.01167	0.0000037923
−0.00375	0.0000038158
0.00418	0.0000038393
0.01212	0.0000038630
0.02009	0.0000038869
0.02805	0.0000039108
0.03604	0.0000039350
0.04403	0.0000039592
0.05204	0.0000039836

論の偏角原理より

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds$$

である．$\xi(s)$ は $\sigma = \frac{1}{2}$ に関して対称であり，実軸上では実数値をとるので，C を $2, 2+iT, \frac{1}{2}+iT$ を結ぶ直線とすれば

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\,\mathrm{Im}\left\{\int_C \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\int_C \left[\frac{d}{ds}\log\xi(s)\right]ds\right\}$$

となる．

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{s(s-1)}{2}\zeta(s)$$

を代入して

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\vartheta(T)+1+\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_C\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$

という表現式を得る．さらに，右辺の積分を偏角で表わしておけ

ば

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = \frac{1}{\pi}\Delta_C \arg \zeta(s)$$

$$= \frac{1}{\pi}\arg \zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)$$

と書ける．ただし，$\Delta_C \arg \zeta(s)$ は $\zeta(s)$ の C 上での偏角の増分を表わす．ここで，もし C 上で $\mathrm{Re}\,\zeta(s)\neq 0$ ならば（これを示すことはかなりめんどうである）$\mathrm{Re}\,\zeta(2)>0$ であるから，C 上で $\mathrm{Re}\,\zeta(s)>0$ となる．ゆえに，$\arg \zeta(s)$ は $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ までの範囲内の値をとる．よって，最終項は

$$\left|\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right| < \frac{1}{2}$$

と評価されて，$N(T)$ は $\dfrac{\vartheta(T)}{\pi}+1$ に一番近い整数として求められる．

Backlund はこの方法で $N(200)=79$ を示し，$0<t\leqq 200$ での $Z(t)$ の符号の変化が 79 回であることを確かめることによって $H(79)$ を証明した．

ところで，$Z(t)$ の零点すなわち $\zeta\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ の零点の分布にはある規則性がある．これは Gram によって注目されていたところで，

$$\vartheta(t) = n\pi, \qquad n = -1, 0, 1, 2, \cdots$$

を満たす t を g_n とすると，$G_n=[g_n, g_{n+1})$ で $Z(t)$ は符号を変えてこの区間で少なくとも 1 個の（望むべくはただ 1 個の）零点があるというのである．これを Gram の法則という．g_n を Gram の点といい，G_n を Gram 区間という．

Gram の点は数値計算を行なえば容易に望むだけの精度でその値を求めることができる．図 3.6 は $\vartheta(t)$ のグラフと Gram の点を図示したものであり，

$$g_{-1} = 9.6\cdots, \qquad g_0 = 17.8\cdots, \qquad g_1 = 23.1\cdots,$$

$$g_2 = 27.6\cdots, \qquad g_3 = 31.7\cdots, \qquad g_4 = 35.4\cdots$$

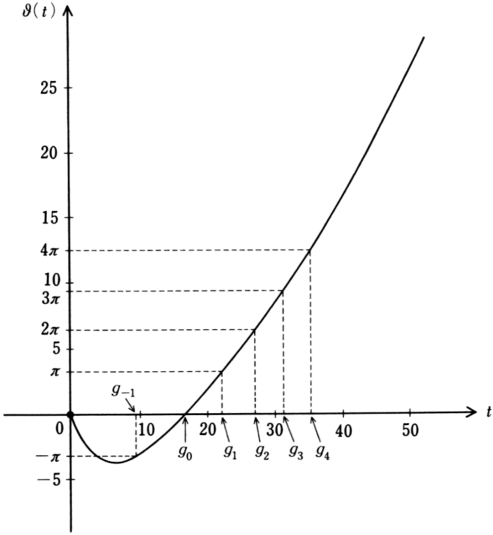


図3.6　$\vartheta(t)$のグラフ

などである．確かに，前に計算した $t=50$ までのところではこの規則が成立している．

Hutchinson は Gram の点を計算し，$Z(g_n), n=-1,0,1,\cdots$ の符号の変化を調べ，Gram の法則が $g_{137}=300.468$ までで $n=126, 134$ を除いて成立し，$0<t<g_{137}$ で 138 回の符号変化があることを示した．さらに彼は，Backlund の方法により $N(g_{137})=138$ を示し，これにより $H(138)$ を証明した．このように，Gram の法則は必ず成立するというものではないのであるが，計算の効率という面では非常に有効な働きをするものである．その後 Hutchinson は $N(g_{268})=269$ を Backlund の方法で示したが，$Z(t)$ の 269 回の符号変化を Euler-Maclaurin の方法で検証することは，t が大きくなるに従って M を大きくとらねばならず，$H(269)$ の証明を断念せざるを得なかった．それは，手計算に近

い手段しかなかった時代にあっては，致し方のないことであった．

t が大きいときの $Z(t)$ の計算においては，Euler-Maclaurin の近似式 (8) と比較して，計算回数が少なく (M が小さく) しかも精度の良い近似式が必要になるが，それが次節で述べる Riemann-Siegel 公式である．

§7. Riemann-Siegel 公式

1932 年 Siegel は Göttingen 大学のライブラリーに保管されていた Riemann の未発表の草稿についての解説を発表し，その驚くべき洞察力で埋もれていた Riemann の研究の一端を掘り起こして見せた [19]．それが今日でいう Riemann-Siegel 公式とよばれるものである．これは Titchmarsh によって初めて零点計算に利用され，彼は Comirie の協力のもとで，$H(1041)$ を証明した．この公式はゼータ関数の近似関数等式というカテゴリーに入るもので，$0<\sigma<1$ でのゼータ関数の挙動を調べるのに有効である．ここでは詳しく説明することはできないが，その概略と有効性だけを示すことにしよう．

まず，Riemann 原論文の $\zeta(s)$ の積分表現

$$2\sin\pi s\,\Gamma(s)\zeta(s) = i\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx$$

を思い起こそう．$\zeta(s)$ の第 N 項より残りの無限級数を，これを導いたと同様の考え方で積分表現すれば

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-Nx}(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx$$

が得られる．この積分を Riemann が行なったように複素積分に変更して，ガンマ関数についての性質 $\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \dfrac{\pi}{\sin\pi s}$ などを使えば，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{e^{-Nz}z^{s-1}}{e^z-1}dz$$

と表わされる．ここで，積分路は $+\infty$ から出発し実軸上に沿って

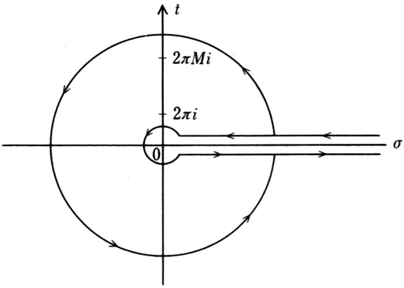


図3.7　積分路の変更

降りて来て原点を回って再び実軸上を$+\infty$にいたるというものである（図3.7）．

次にMをある自然数としよう．さらに積分路を$+\infty$から実軸上を出発し，原点を中心とする半径$(2\pi M+1)$の円周を正の向きに一周し再び実軸上を$+\infty$にいたるという曲線C_M（図3.7）に変更すれば，留数計算により

$$(14)\quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}2\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^{1-s}} +\frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i}\Gamma(1-s)\int_{C_M}\frac{e^{-Nz}z^{s-1}}{e^z-1}dz$$

となる．この最終項の積分を大ざっぱに（といってもかなり複雑な計算をして）上から評価したものが近似関数等式といわれるもので，この項をさらに細かい項に漸近展開したものがRiemann-Siegel公式である．これを導くためには，かなり巧妙な積分路の変更と複雑な計算を必要とし，Siegelの洞察力はもとより，Riemannの原論文の背景にある底知れぬ考察力に対して驚嘆せざるをえない．ここでは，その結果だけを紹介しておこう．

(14)式よりゼータ関数の近似式は

$$\zeta(s)\sim\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}2\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^{1-s}}$$

であるが，この両辺に $\frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ をかけて，ガンマ関数の倍数公式

$$\Gamma(s) = 2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}}$$

を $\Gamma(1-s)$ に適用し，関数等式 $\Gamma(1-s)\Gamma(s)\sin \pi s = \pi$ を利用すれば，

$$\xi(s) \sim \frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$$

$$+(-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^{1-s}}$$

となる．ここで，

$$M = N, \qquad g(s) = \frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

とし，$h(t) = g\left(\frac{1}{2}+it\right)$ とすれば，

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \sim h(t)\sum_{n=1}^{M}n^{-\frac{1}{2}-it}+h(-t)\sum_{n=1}^{M}n^{-\frac{1}{2}+it}$$

と書ける．

$$h(t) = \frac{-t^2-\frac{1}{4}}{2}\pi^{-\frac{1}{4}}e^{\mathrm{Re}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}e^{i\left\{\mathrm{Im}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)-\frac{t}{2}\log\pi\right\}}$$

$$= A(t)e^{i\vartheta(t)}$$

であり，

$$A(-t) = A(t), \qquad \vartheta(-t) = -\vartheta(t),$$

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = A(t)Z(t)$$

であるから，両辺より $A(t)$ を消去すれば

$$Z(t) \sim e^{i\vartheta(t)}\sum_{n=1}^{M}n^{-\frac{1}{2}-it}+e^{-i\vartheta(t)}\sum_{n=1}^{M}n^{-\frac{1}{2}+it}$$

$$= \sum_{n=1}^{M}2n^{-\frac{1}{2}}\cos\{t\log n-\vartheta(t)\}$$

となり，主要項は大変明解な形をしている．

それでは Riemann-Siegel 公式を述べよう．

Riemann-Siegel 公式

$$\tau = \frac{t}{2\pi}, \qquad M = [\sqrt{\tau}], \qquad y = 2(\sqrt{\tau} - M) - 1$$

とすれば

$$(15) \quad Z(t) = \sum_{n=1}^{M} 2n^{-\frac{1}{2}} \cos\{t \log n - \vartheta(t)\}$$
$$+ (-1)^{M+1} \tau^{-\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{k} \Phi_j(y)(-1)^j \tau^{-\frac{j}{2}} + R_k(\tau),$$

$$R_k(\tau) = O(\tau^{-\frac{2n+3}{4}})$$

という展開公式が成立する．

数値計算上は $k = 2$ としても充分精度の良い結果が得られ，そのときの $\Phi_j(y)$ は

$$\Phi_0(y) \equiv \Phi(y) = \frac{\cos\left\{\dfrac{\pi(4y^2+3)}{8}\right\}}{\cos \pi y},$$

$$\Phi_1(y) = \frac{\Phi^{(3)}(y)}{12\pi^2},$$

$$\Phi_2(y) = \frac{\Phi^{(2)}(y)}{16\pi^2} + \frac{\Phi^{(6)}(y)}{288\pi^4}$$

である．ここで，$\Phi^{(l)}(y)$ は $\Phi(y)$ の l 次の導関数である（[2] 参照）．

$\Phi_j(y)$ の値の数値計算においては，$\Phi(y)$ の Maclaurin 展開式を利用する．

$$f(y) = \cos\left\{\frac{\pi(4y^2+3)}{8}\right\}$$

とすれば，

$$f^{(3)}(y) + \pi^2 y^2 f'(y) + 3\pi^2 y f(y) = 0$$

であるから，両辺を n 回微分して $y = 0$ とすれば

$$f^{(n+3)}(0) = -n(n+2)\pi^2 f^{(n-1)}(0)$$

である．よって，$f(y)$ の Maclaurin 展開の y^{2k} の係数は

$$\frac{1}{2^k k!}\pi^k \cos\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{k}{2}\pi\right)$$

となる．これを利用すれば $\Phi(y)$ の Maclaurin 展開式の係数を求めることができる．

最初に Titchmarsh が Riemann-Siegel 公式を利用したときは $k=0$ として使い，そのときの誤差評価として，

$$|R_0(\tau)| < \frac{3}{2}\tau^{-3/4}, \qquad \tau > 125$$

を与えた．Brent はさらに，

$$|R_2(\tau)| < 3\tau^{-7/4}, \qquad \tau > 2000$$

を利用している．これらの誤差評価から，t が大きいところでは公式そのものの誤差は非常に小さくなる．よって，この理論誤差よりも計算機を使うときに出てくる打ち切り誤差（主要項の計算回数が増えるから）に気を付けねばならない．さらに，Riemann-Siegel 公式は主要項を構成する項の個数が $M=\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right]$ であるから，Euler-Maclaurin の方法では $M \sim \frac{t}{2\pi}$ であったのと比較すると，主要項を求めるための計算回数という面から見て格段に効率の良い公式であることがわかる．

§8. t が大きいときの零点分布の研究

$Z(t)$ の符号変化の回数を調べる方法では，前節で述べた Gram の法則が大きな役割を果たす．それは Riemann-Siegel 公式（15）における主要項

$$\sum_{n=1}^{M} 2n^{-\frac{1}{2}}\cos\{t\log n-\vartheta(t)\}$$

において，その正負に大きな影響を与えると思われる初項（$n=1$ の項）が $t=g_k$ とすると

$$2\cos\vartheta(g_k)=2\cos k\pi=2(-1)^k$$

と k によって符号を変えることからも，その有効性を推察するこ

とができよう．

もしGramの法則が完全に成立していれば

(16)　$(-1)^k Z(g_k) > 0$

である．この意味から(16)を満たすg_kを良いGram点，もしそうでなければ悪いGram点という．前に述べたように，Gramの法則はいつも成立するわけではなく，g_{126}が最初に現われる悪いGram点である．広い範囲での$Z(t)$の符号変化を電子計算機を使って数え上げていくためには，まずGram点を計算しておいて，その点における$Z(t)$の値を計算し，良いGram点かどうかを判定する．良いGram点がk回続けば，少なくともそれだけの符号変化をカウントできたことになる．悪いGram点に当たれば，もう少し詳しく調べる必要がある．

Rosser達はその零点計算の過程で，零点の分布には次のようなおもしろい規則が見られることに気が付いた．区間$\boldsymbol{B}_j=[g_j, g_{j+k})$で$g_j, g_{j+k}$が良いGram点で$g_{j+1},\cdots\cdots, g_{j+k-1}$が悪いGram点のとき，$\boldsymbol{B}_j$は長さ$k$のGramブロックということにする．すると**"$Z(t)$は$B_j$において少なくとも$k$個の零点を持つ"**という規則である．これは今日，Rosserの規則といわれている．

これもまた，成立しない例が無限にあることがわかっているが，零点計算のアルゴリズムという観点から見ると非常に有効な規則である．事実，Rosserの規則が成立しない最初のブロックが$\boldsymbol{B}_{13,999,525}$であり，それまでのGramブロックではすべてこの規則が成立している．

Gramブロックという概念で，あるnについて(g_{-1}, g_n)における$(n+1)$回の符号変化を探査するアルゴリズムを説明すれば次のようになろう．

1°　g_jを良いGram点とし，(g_{-1}, g_j)で$(j+1)$回の符号変化が見られたとする．

2°　Gramブロック$\boldsymbol{B}_j=[g_j, g_{j+k}]$を求める．

3° いくつかの $t \in \boldsymbol{B}_j$ について $Z(t)$ の値を計算し，$\boldsymbol{B}_j$ において k 個の符号変化が見られるかどうか調べる．

4° k 個の符号変化が見られたら，$j=j+k$ と置き換えて，再び 2° の作業に入る．

このアルゴリズムで，4° において k 回の符号変化が見られない場合は Rosser の規則を満たさないか，あるいは重根に近い状況が起こっていて正負の判定がむずかしい場合である．この場合は，さらに精度を上げて計算を実行する．現在（1989 年）までに実行された計算ではすべて，Rosser の規則を満たさない Gram ブロックでの足りない零点の個数を，前か後の Gram ブロックが補っていることがわかった．このようにして，ある n について $N(g_n) \geqq n+1$ を示すことができる．

さてそこで，$N(g_n) \leqq n+1$ を示すための，Backlund の方法とは別のもう 1 つの方法を紹介しよう．Backlund の方法では $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma+ig_n) \neq 0, \frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$ を示すことで $N(g_n) \leqq n+1$ を証明した．この方法では $\sigma=\frac{1}{2}$ の線上以外での $\zeta(s)$ の値を計算する必要がある．これに対して，次に述べる Turing[3] の方法は $Z(t)$ の符号の変化を観察すること，すなわち $\sigma=\frac{1}{2}$ の線上での情報のみで $N(g_n)$ の大きさを評価しようとする方法である．

いま実数列 $\{h_m\}$ を，$(-1)^m Z(g_m+h_m) > 0$ を満たし，……，$g_{m-1}+h_{m-1}, g_m+h_m, g_{m+1}+h_{m+1}$, …… が狭義の単調増加数列となるものとしよう．このような h_m は 4° で $Z(t)$ の符号変化を調べるときに生成され，Gram の法則が成立しているところでは $h_m=0$ にとれる．さて，

$$S(t) = N(t) - 1 - \frac{\vartheta(t)}{\pi}$$

と置く．$t=g_n$ が良い Gram 点であるとき，$Z(t)$ は $t=0$ では

3）思考計算機 Turing Machine で有名である．

負であり $(-1)^n Z(g_n)>0$ であるから，$\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2}+ig_n$ の直線上の $\zeta(s)$ の零点の個数の偶奇（偶数であるか奇数であるかということ）は n の偶奇と反対になる．さらに，$\sigma=\frac{1}{2}$ の線上以外に零点が存在するとすれば，関数等式により直線 $\sigma=\frac{1}{2}$ に関して対称に存在するから，$N(g_n)$ の偶奇は n の偶奇と反対になる．ゆえに，

$$S(g_n) = N(g_n)-1-\frac{\vartheta(g_n)}{\pi}$$
$$= N(g_n)-1-n$$

は偶数である．よって，$S(g_n)<2$ を示せば必然的に $S(g_n)\leqq 0$ であり，$N(g_n)\leqq n+1$ が導かれる．

1924年，Littlewood は，A をある定数として

$$\int_0^T S(t)\,dt < A\log T$$

が成立することを証明した．Turing [23] はこのアイデアより $t_2>t_1>168\pi$ なる実数 t_1, t_2 に対して

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} S(t)\,dt\right| \leqq 2.30+0.128\log\left(\frac{t_2}{2\pi}\right)$$

が成立することを示し[4]，これを利用して $S(g_n)$ と $h_{n+1}, h_{n+2}, \cdots$ の間の関係を付けることで $S(g_n)$ を評価しようとした．いま $L_0(t), L(t)$ を

$$L_0(t) = j, \qquad g_{n+j}\leqq t<g_{n+j+1}, \qquad j=0,1,2,3,\cdots$$
$$L(t) = j, \qquad g_{n+j}+h_{n+j}\leqq t<g_{n+j+1}+h_{n+j+1},$$
$$j=0,1,2,3,\cdots$$

で定義される階段関数とすれば，$L_0(t)$ は $\pi^{-1}\vartheta(t)$ が1増加するごとに1増加するので，$t\geqq g_n$ なる t に対して，

$$\pi^{-1}\vartheta(t)+1 \leqq \pi^{-1}\vartheta(g_n)+1+L_0(t)+1$$

である．また，h_m の作り方より $Z(t)$ は区間 $(g_m+h_m, g_{m+1}$

4)　この Turing の評価式における係数 2.30 および 0.128 は Lehman [10] によって，それぞれ，1.91 および 0.114 に修正されている．

$+h_{m+1})$ で少なくとも1回符号を変えるので,

$$N(t) \geqq N(g_n)+L(t)$$

である. よって,

$$S(t) \geqq S(g_n)+L(t)-L_0(t)-1$$

が成立する. $h_{n+k}=0$ にとれるとすれば

$$\int_{g_n}^{g_{n+k}} S(t)\,dt \geqq \int_{g_n}^{g_{n+k}} \{S(g_n)-1\}dt + \int_{g_n}^{g_{n+k}} \{L(t)-L_0(t)\}dt = (g_{n+k}-g_n)\{S(g_n)-1\}-\sum_{j=n+1}^{n+k-1} h_j$$

となる. ゆえに,

$$(17) \quad S(g_n) \leqq 1+\frac{2.30+0.128\log\left(\dfrac{g_{n+k}}{2\pi}\right)+\sum_{j=n+1}^{n+k-1} h_j}{g_{n+k}-g_n}$$

が成立する.

この評価式により, ある n について $S(g_n)<2$ が示され, さらに, 直線 $\sigma=\dfrac{1}{2}+it$ の上で $(n+1)$ 個の零点がカウントされれば, 命題 $H(n)$ が証明されたことになる.

1950年 Turing はこの方法と電子計算機を使い Titchmarsh の記録を少し塗り変えることができたが, 当時の計算機の能力の問題もあり, また使用時間も思うにまかせず, 顕著な記録更新にはいたらなかった. しかし, この方法は Lehmer 以後の人達に受け継がれ, $H(n)$ の記録は電子計算機の発達とも呼応して飛躍的に伸びている. Lune, Riele, Winter [14] は Gram 点 $g_{1,500,000,000}$ までの $Z(t)$ の符号変化を調べ

$$N(g_{1,500,000,000}) \geqq 1{,}500{,}000{,}001$$

を示した. この実験過程で3055個の Rosser の規則を満たさない Gram ブロックがリストアップされているが, いずれの Gram ブロックも, 足りない零点を前か後の Gram ブロックが補っていることがわかった. さらに, $g_{1,500,000,006}$ までの $Z(t)$ の符号変化を

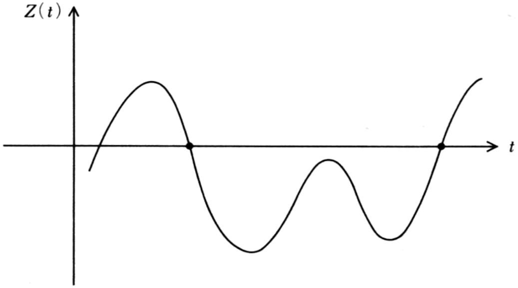


図 3.8

調べることで，$h_j, j = 1{,}500{,}000{,}001 \sim 1{,}500{,}000{,}005$ の値を決定し，(17) を修正した Lehman の評価式を使って $S(g_{1,500,000,000}) < 2$ を証明した．よって

$$N(g_{1,500,000,000}) \leqq 1{,}500{,}000{,}001$$

であり $H(1{,}500{,}000{,}001)$ の証明に到達できた．

いままでの実験結果はもちろん Riemann 予想の肯定的な検証になっており，$Z(t)$ が $t < g_{1,500,000,000}$ の範囲では，ある程度規則的な変動をしていることを示している．

一方，Riemann 予想を仮定すれば，$Z(t)$ の連続する零点の間では $Z'(t)$ は高々 1 個の零点を持つことがわかる [4]（176 ページ）．よって，$Z(t)$ のグラフが図 3.8 のようになれば，それは Riemann 予想の反証を与えることになる．Lehmer はその零点計算の過程で $Z(t)$ のグラフが図 3.8 に近い形になることが g_{6707} の近くで起こることに言及している．精密に計算すれば，実際はきわどくその符号を変えている．Brent [2] はこの Lehmer の指摘した現象が $t = 18882503.9$ の近くで，さらに顕著な形で起こっていることに注意している．図 3.9 はこの周辺の $Z(t)$ のグラフであり，図 3.10 は $t = 18882503.901 \sim 18882503.902$ までの $Z(t)$ の変化を詳しくえがいたものである．表 3.3 からわかるように，

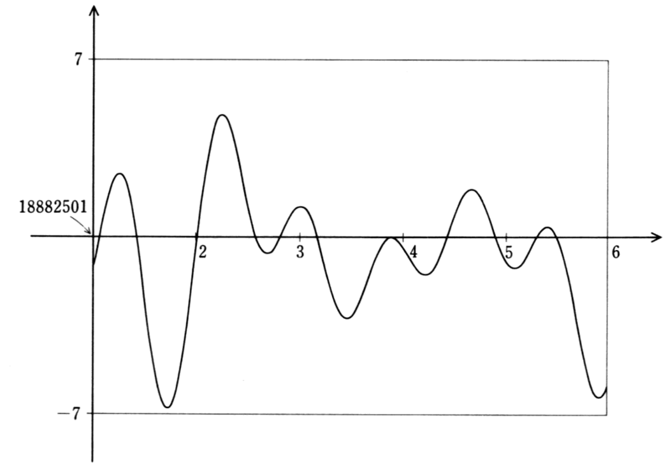


図 3.9　$Z(t)$ $(18882501 \leqq t \leqq 18882506)$ のグラフ

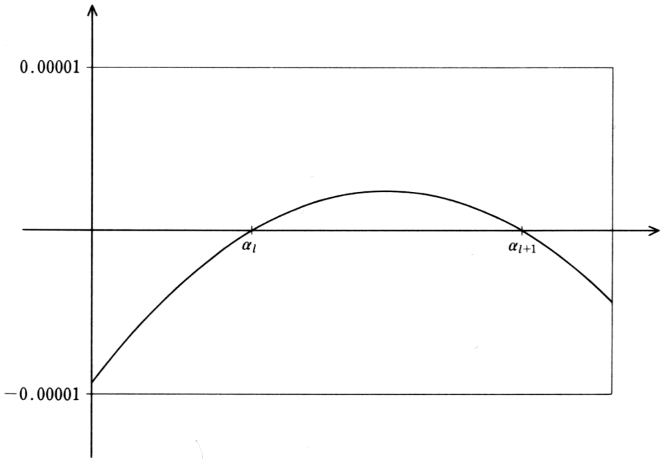


図 3.10　$Z(t)$ $(18882503.901 \leqq t \leqq 18882503.902)$ のグラフ

表 3.3　$z(t)$ (18882503.901≦t≦18882503.902) の値

t	$Z(t)$	$R_2(\tau)$
18882503.90100	−0.000009374111580	0.00000000001383
18882503.90105	−0.000007382526806	0.00000000001383
18882503.90110	−0.000005574100356	0.00000000001383
18882503.90115	−0.000003948812030	0.00000000001383
18882503.90120	−0.000002506641601	0.00000000001383
18882503.90125	−0.000001247568811	0.00000000001383
18882503.90130	−0.000000171573373	0.00000000001383
18882503.90135	0.000000721365027	0.00000000001383
18882503.90140	0.000001431266735	0.00000000001383
18882503.90145	0.000001958152124	0.00000000001383
18882503.90150	0.000002302041596	0.00000000001383
18882503.90155	0.000002462955583	0.00000000001383
18882503.90160	0.000002440914546	0.00000000001383
18882503.90165	0.000002235938973	0.00000000001383
18882503.90170	0.000001848049384	0.00000000001383
18882503.90175	0.000001277266325	0.00000000001383
18882503.90180	0.000000523610374	0.00000000001383
18882503.90182	0.000000170948199	0.00000000001383
18882503.90183	−0.000000016353614	0.00000000001383
18882503.90185	−0.000000412897864	0.00000000001383
18882503.90190	−0.000001532237754	0.00000000001383
18882503.90195	−0.000002834388634	0.00000000001383
18882503.90200	−0.000004319329811	0.00000000001383

$$\alpha_{l+1} - \alpha_l < 0.00053,$$

$$\max_{t \in (\alpha_l, \alpha_{l+1})} Z(t) < 0.00000248$$

であり，$Z(t)$ はきわどくその符号を変えている[5]．これらは Riemann 予想を脅かしたともいえる実験結果であった．

いままでの数値実験においてはいずれも，Riemann 予想の限定的検証に加えて，零点分布の統計的な検討がなされている．それによれば，Gram 区間における $Z(t)$ の零点の個数は，あたかもある離散的な確率分布に従っているように見える．また，Odlyzuko [16] は $Z(t)$ の零点と零点の間隔 $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ の大きさについての Montgomery の予想に関連して数値実験を行ない，この間隔の分布がある種の物理モデルと類似していることに言及している．Riemann 予想に対する数値実験は，このように新しい側面をも提供しながら今後も進められていくことであろう．

●文献

[1] Backlund, R.: Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, V. 158 (1914), 1979-1982.

[2] Brent, R. P.: On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, Math. Comp. vol 33, No. 148 (1979), 1361-1372.

[3] Brent, R. P., J. van de Lune, H. J. J. te Riele, and D. T. Winter: On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip II, Math. Comp. vol. 39, No. 160 (1982), 681-688.

[4] Edwards, H. M.: Riemann's Zeta Function, Acad. Press, 1974.

[5] Gram, J.: Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Acta Math. 27 (1903), 289-304.

---

5) 図 3.9，図 3.10，表 3.3 の作成には木田祐司氏の多倍長計算用ソフト UBASIC を使用した（日本評論社発売）．

[6] Hardy, G. H. : Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, V. 158 (1914), 1012-1014 (Hardy 全集 vol. 2).

[7] Hutchinson, J. I. : On the roots of the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925), 49-60.

[8] Ivič, A. The Riemann Zeta Function, Wiley-Interscience, 1985.

[9] Lehman, R. S. : Separation of zeros of the Riemann zeta function, Math. Comp. 20 (1966), 523-541.

[10] Lehman R. S. : On the distribution of zeros of the Riemann zeta function, Proc. London Math. Soc. (3) 20 (1970) 303-320.

[11] Lehmer, D. H. : On the roots of the Riemann zeta function, Acta Math., vol. 95 (1956), 291-298.

[12] Lehmer, D. H. : Extended computation of the Riemann zeta function, Mathematika, vol. 3 (1956), 102-108.

[13] van de Lune, J. and H. J. J. te Riele : On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip III, Math. Comp. vol. 41, No. 164 (1983), 759-767.

[14] van de Lune, J., H. J. J. te Riele and D. T. Winter : On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip IV, Math. Comp. vol. 46, No. 174 (1986), 667-681.

[15] Meller, N. A. : Computations connected with the check of Riemann's hypothesis, Dokl. Acad. Nauk SSSR, vol. 123 (1958), 246-248.

[16] Odlyzko, A. M. : On the distribution of spacings between zeros of the zeta function, Math. Comp. vol. 48, No. 177 (1987), 273-308.

[17] Riemann, B. : Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berlin Academie, 1959 (Riemann 全集).

[18] Rosser, J. B., J. M. Yohe and L. Schoenfeld : Rigorous compu-

tation and the zeros of the Riemann zeta function, Cong. Proc. Int. Federation Information Process (1968), Edinburgh.

[19] Siegel, C. L.: Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 2 (1932), 45-80 (Siegel 全集 vol. 1).

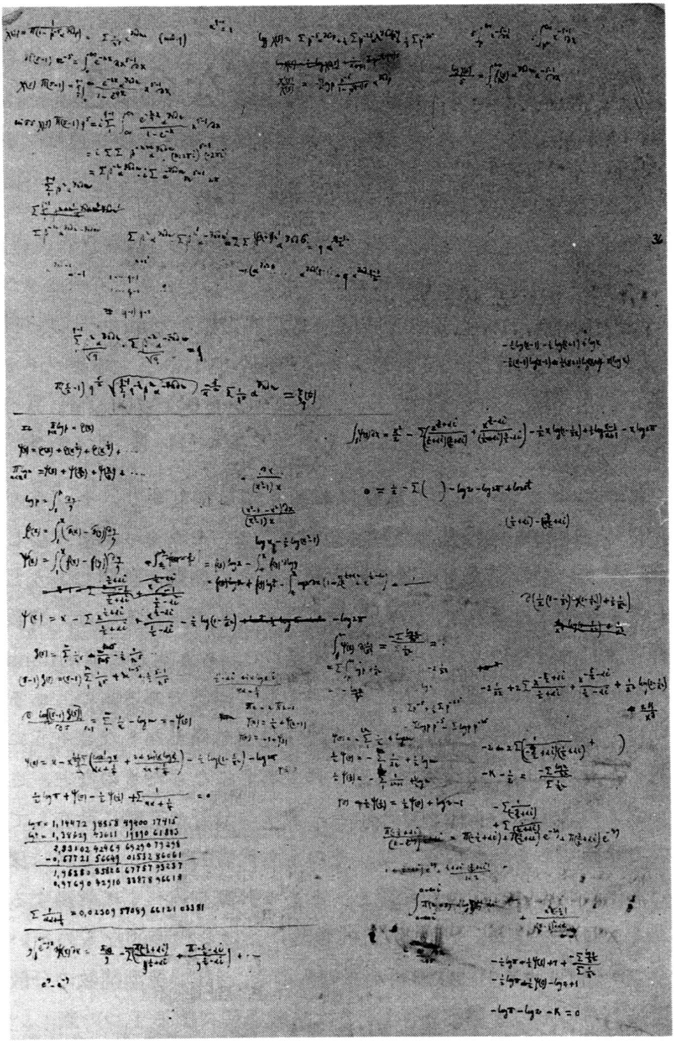
[20] 竜沢周雄『関数論』共立出版, 1980.

[21] Titchmarsh, E. C.: The zeros of the Riemann zeta function, Proc. Roy. Soc. London, vol. 151 (1935), 234-255., vol. 157 (1936), 261-263.

[22] Titchmarsh E. C.: The Theory of the Riemann Zeta Function, Oxford Univ. Press, Oxford, 1951.

[23] Turing A. M.: Some calculations of the Riemann zeta function, Proc. London Math. Soc., 3, vol. 3 (1953), 99-117.

[第 3 章担当／山野剛助]



論文の下書き（計算用紙）

●第 4 章

Riemann 予想に同値な命題

Riemann 予想に同値な命題は数多く知られており，それらの中には，Riemann 予想を証明しようとして，それよりももう少し扱いやすいかに見える命題で置き換え，その命題を証明しようとしたが結局果たされず，その命題が残ったもの，あるいは，素数分布論におけるいくつかの命題（後述）で，もともとの Riemann 予想が提出された理由から，あるべくして同値であるもの，あるいは，Farey 分数の分布のように，一見何の係わりもなさそうに見えるところに，同値性が見出されて有名になったものなど，さまざまのタイプのものがいろいろな数学の分野の文献に散在している状態である．この章では，そのうち代表的で，しかも興味深いと思われるいくつかの命題を，あまり計算を述べずに解説することを目的とする．§1 で解析的数論における代表的なものをいくつか述べ，§2 で関数解析からのものを，§3 で保型関数の分散理論からのものを述べる．§4 では拡散過程による 1 つの新しい試みを概説する．

§1. 解析的数論から

Riemann 予想は，最初に述べた通り，素数分布に関する Riemann の画期的な（唯一の）論文で述べられたものであるから，素数の個数を表わす関数

$$\pi(x) = \sum_{p \leqq x,\, p:\text{素数}} 1$$

（右辺の意味は，1 を x 以下の素数 p について加えるということであるから，ちょうど x 以下の素数の個数を表わすのである）に関して Riemann 予想に同値な命題があると推測するのは自然であり，実際，それは次の定理で与えられる．以下 Riemann 予想を R. H. と略称する．

定理 1.1　R. H. が成り立つ $\iff$ $\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ．ただし，

$$\mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \text{（対数積分 logarithm integral）}^{1)}$$

である．

まず定理に現われた記号の意味を説明しよう．一般に，x が大のとき，2 つの関数 $f(x), g(x)$ $(g(x) > 0)$ の間に，不等式

$$|f(x)| \leqq Kg(x)$$

が成り立つような x に無関係な定数 $K > 0$ が存在するとき，

$$f(x) = O(g(x))$$

と書く（Bachmann-Landau の記号），また

$$f(x) \ll g(x)$$

と書くこともある（Vinogradov の記号）．

したがって，定理の意味は，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，x が大のとき

$$|\pi(x) - \mathrm{li}\, x| \leqq Kx^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

となるような x に無関係な定数 $K > 0$ が存在するというもので，

---

1)　$\mathrm{li}\, x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \right) \frac{dt}{\log t}$ と定義することもある．

実質は不等式であるが，実用上は等式のように解して，$\pi(x)$ を $\mathrm{li}\, x$ で近似したときの誤差が $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ の定数倍程度でおさえられると理解するのがわかりやすい．もちろん，$\mathrm{li}\, x$ が第1近似であるから，それは $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ よりも∞への行き方が速くなければならない（このとき，位数が高いという）．それは，部分積分によって得られる次の漸近公式が保証するのである：$\forall m \in \boldsymbol{N}$ に対し，

$$\mathrm{li}\, x = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots\cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right).$$

この式は，もちろん $\dfrac{x}{\log x}$ が $\mathrm{li}\, x$ の第1近似であることを意味しているから，定理1.1は，素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

を含む．ここで，～は

$$\pi(x) \Big/ \frac{x}{\log x} \to 1, \qquad x \to \infty$$

を意味する．

$\pi(x)$ が $\mathrm{li}\, x$ で良く近似されることを予想したのは Gauss である．素数定理は，Hadamard と de la Vallée-Poussin によって独立に，

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})), \qquad \exists c > 0$$

の形で証明された．その後，Vinogradov, Čudakov, Titchmarsh らの改良の後，現在知られている最良の形は，Vinogradov, Korobov による

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x \exp(-c(\log x)^{0.6}(\log\log x)^{-0.2})), \qquad \exists c > 0$$

である．$\exp(c(\log x)^{0.6})$ というのは，x のいかなる小さなベキ x^{ε}（それは $\exp(\varepsilon(\log x))$ である）よりも低位の大きさであるから，R. H. から導かれる誤差項の評価 $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ がいかに鋭いもの

であるかが感得されるであろう．

ところで，R. H. から導かれる結論（実は同値条件）は

(1.1)　$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$

で，

$$\frac{\log x}{x^{\varepsilon}} \to 0, \qquad x \to \infty$$

であるから，定理1.1の評価より少しよい．ところが，(1.1) ですらも，$\pi(x)$ を $\mathrm{li}\, x$ で近似したときの第2項の大きさの位数を完全には決定していないことに注意しよう．実際，(1.1) は $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$ に対する上からの評価であり，真の大きさの位数が決定できるためには下からの評価を求める必要があるが，それの最良の結果は，Littlewood による

(1.2)　$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = \Omega_{\pm}\left(x^{\frac{1}{2}} \dfrac{\log\log\log x}{\log x}\right)$

であって，$x^{\frac{1}{2}}$ のところは同じであるが，log-factor の部分にまだ開きがある．ここで，一般に，

$$f(x) = \Omega_{+}(g(x)), \qquad g(x) > 0$$

は，ある定数 $c>0$ に対し，

$$f(x) > cg(x)$$

となる任意に大きい x の値が存在することを，また同様に，

$$f(x) = \Omega_{-}(g(x))$$

は，ある定数 $c>0$ に対し，

$$f(x) < -cg(x)$$

となる任意に大きい x の値が存在することを意味する．すなわち，(1.2) は $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$ が $x^{\frac{1}{2}} \dfrac{\log\log\log x}{\log x}$ よりも低位でないこと，つまり，下からの評価を与える．

上では素数定理を $\pi(x)$ について述べたが，素数定理と同じ深さにある（すなわち，関数論を用いることなくその同値性が証明できる）定理がいくつかある．その主なものは，$\Lambda(n)$ を von

Mangoldt の関数，すなわち，

$$\Lambda(n) = \log p, \qquad n = p^m,\ \text{素数ベキのとき,}$$
$$\qquad = 0, \qquad \text{その他のとき}$$

とするとき，その和

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leq x} \log p \qquad (\text{Čebyšëv の関数})$$

に対して，$\psi(x) \sim x$ なる漸近式は，素数定理と同じ深さにあり，同じく Čebyšëv によって考察された関数

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

に対して，$\vartheta(x) \sim x$ も素数定理と同じ深さにある.

また，$\mu(n)$ を Möbius の関数，すなわち，

$$\mu(n) = (-1)^k, \qquad n = p_1 \cdots p_k \text{ が相異なる } k \text{ 個の素数の積のとき,}$$
$$\mu(1) = 1,$$
$$\mu(n) = 0, \qquad n \text{ がある素数の 2 乗で割れるとき}$$

なる数論的関数とすれば，その和

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

に対し，

$$M(x) = o(x)$$

（この意味は，$\dfrac{M(x)}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ ということである）および

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$$

は素数定理と同じ深さにある.

素数分布論においては，$\pi(x)$ を直接扱うよりも，生成関数が扱いやすい形をしている $\psi(x)$ の方を考察するのが普通であって，大部分の書物では，まず $\psi(x)$ に対して素数定理（あるいは誤差項付きの形で）を証明しておいて，それを $\pi(x)$ の方へ（本質的にはただ Abel の変形法のみによって）移すというやり方が行な

われている．素数定理と同じ深さにあるような定理に現われる関数 $\psi(x), M(x), \cdots\cdots$ に対してはだいたい R. H. と同値な命題が考えられ，次にその2つを述べる．

定理 1.2　R. H. が成り立つ $\iff$ $\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ．

定理 1.3　R. H. が成り立つ $\iff$ $M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ．

$\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$ であるから，定理 1.2 で $\psi(x)$ を $\vartheta(x)$ で置き換えてももちろんよい．また，$\pi(x)$ のときと同様，実は

$$\text{R. H.} \iff \psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x)$$

が従う．また下からの評価は Littlewood による

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}} \log\log x)$$

であり，R. H. を仮定してさえ，$\psi(x) - x$ の大きさの位数が定まらないのは $\pi(x)$ の場合と同様である．

R. H. から導かれる $M(x)$ の最良の上からの評価は

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \exp\left(c \frac{\log x}{\log\log x}\right)\right), \qquad \exists c > 0$$

であり，下からのそれは

$$M(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{これは } M(x) = o(x^{\frac{1}{2}}) \text{ の否定})$$

である．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \qquad (0 \text{ に収束する})$$

は素数定理と同じ深さにあるのであるが，これら2つの関係と類似な関係にあるのが定理 1.3 と次の定理である（証明は次章（3.3）式の後の段落参照）．

定理 1.4　R. H. が成り立つ $\iff$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ が $\mathrm{Re}\, s > \dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{\zeta(s)}$ に収束する．

ここで

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1$$

は Riemann のゼータ関数を表わす.

$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}\, s > 1$ でとる値に明白に依存した R. H. の同値条件も知られている.

定理 1.5 (M. Riesz) R. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n-1)!\,\zeta(2n)} = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

が $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ.

類似のものとして,

定理 1.6 (Hardy-Littlewood)[2]**.** R. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,\zeta(2n+1)} = O(x^{-\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

が $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ.

Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s$ (以下これを慣用に従って, σ と書く) >1 に対して, Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ で定義されることは上に述べたが, 実はその定義域 $\sigma > 1$ は関数等式によって, 全平面に広げられるのである. 解析接続されたものを再び $\zeta(s)$ と書くと, $\zeta(s)$ は $s = 1$ で 1 位の極を持つ以外は正則な有理型関数である. $\zeta(s)$ の関数等式はすでに Euler によってその形が予想されていたが, 証明は Riemann が初めて, 2 通りの異なるものを与えた (その 1 つについては §4 で言及する). そのどちらも, より一般なゼータ (L-) 関数の関数等式の証明の際に, 基本的な役割を果たす (第 6 章参照). $\zeta(s)$ の関数等式は,

(1.3) $\quad \xi(s) = \dfrac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}s\right) \zeta(s)$

と置くとき,

(1.4) $\quad \xi(s) = \xi(1-s)$

2) Titchmarsh の書では ε がついていないが, ε をつけた形が正しい (村田玲音氏の指摘による).

と表わされる．あるいは，$\Xi(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ と置いて，

$$\Xi(z)=\Xi(-z)$$

すなわち，$\Xi(z)$ が偶関数というふうに述べることもできる．

このΞを用いた，次のようなR. H.の同値命題も知られている．まず，

$$\Phi(u)=2\sum_{n=1}^{\infty}(2n^4\pi^2e^{\frac{9}{2}u}-3n^2\pi e^{\frac{5}{2}u})e^{-n^2\pi e^{2u}}$$

とすれば，

$$\Xi(t)=2\int_0^{\infty}\Phi(u)\cos ut\,du$$

となることが，後述のJacobi変換公式（4.1）から直ちに従うことに注意する．

定理1.7 (Pólya)　$\Xi(t), \Phi(u)$ が上の関係にあるとき，$\Xi(t)$ の零点がすべて実である（すなわち，R. H.が成り立つ）ための条件は，x, y のすべての実数値に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)\Phi(\beta)e^{i(\alpha+\beta)x}e^{i(\alpha-\beta)y}(\alpha-\beta)^2d\alpha d\beta\geqq 0$$

となることである．

先に，$\psi(x)$ に関するR. H.の同値条件を述べる際に，生成関数ということばを断わりなしに使ったが，これは次のような意味である．$\sigma>1$ に対しては，$\zeta(s)$ は

$$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}\qquad(\text{すべての素数}\ p\ \text{にわたる積})$$

という形のEuler積に展開される（そして，これは，$\boldsymbol{Z}$ がUFDであることの解析的な同値式である）．このEuler積表示から直ちに，$\sigma>1$ に対して

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\qquad \frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

などが得られるのであるが，このとき，$\Lambda(n)$ の生成関数は $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$，$\mu(n)$ のそれは $\frac{1}{\zeta(s)}$ であるというのである．

$\Lambda(n), \mu(n)$ に対してR. H.に同値な命題を上に述べたが，だ

いたい生成関数の分母に $\zeta(s)$ が出てくるような数論的関数に対して，同様に，R. H. に関連した命題が考えられるのであって，たとえば，Liouville の関数 $\lambda(n)$ は，

$$\lambda(1) = 1,$$

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1+\cdots\cdots+a_r},$$

$$n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots\cdots p_r^{a_r} \qquad (p_1, \cdots, p_r \text{ は相異なる素数})$$

と定義されるのであるが，その生成関数は $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$ である．$\mu(n)$ のときと同様，次の定理が成り立つ：

定理 1.8　R. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\leq x}\lambda(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が $\forall\varepsilon>0$ に対して成り立つ．

$$\sum_{n\leq x}\lambda(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

が正しいことを暗示する次の理論は興味深い：$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ が ±1 からなる任意の数列とすれば，それらは全部で $N = 2^n$ 個ある．いま $A(n, r)$ で $\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right|<r$ となるような集合の数を表わせば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n, n^a)}{N} = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2}<a<1 \text{ のとき} \\ 0, & 0<a<\dfrac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．したがって，ランダムに選んだ数列 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ に対し，

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \leqq n^a, \qquad a>\frac{1}{2}$$

となる確率は 1 である．$\lambda(n)$ はもちろん ε-数列であるので，もし，「ランダム」であるなら，$\forall a>\dfrac{1}{2}$ に対し，確率 1 で，

$$\sum_{n\leq x}\lambda(n) = O(x^a)$$

となる．

今度は，$\lambda(n)$ の生成関数の逆数 $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ を生成関数とする数論的関数を考えよう．それは $|\mu(n)|$ であって，平方因子を含まない自然数の集合の特性関数である．同様に，$2\leqq k\in \boldsymbol{Z}$ に対して，

k-乗因子を含まないような自然数の集合の特性関数を $q_k(n)$ と書けば $(q_2(n)=|\mu(n)|)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_k(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}, \qquad \sigma>1$$

が成り立つ．Stark が証明したように，

定理 1.9　$\forall\varepsilon>0$ に対し，$\exists k$, $2\leqq k\in \boldsymbol{Z}$ で

$$\sum_{n\leqq x}q_k(n)=\frac{x}{\zeta(k)}+O(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon})$$

が成り立つ $\Longrightarrow$ R. H. が成り立つ．

逆に，R. H. が正しいと仮定したとき，

$$\sum_{n\leqq x}q_k(n)=\frac{x}{\zeta(k)}+O(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}), \qquad \forall\varepsilon>0$$

であると予想されているが，未だ証明されていない．R. H. の下での最良の結果は Montgomery と Vaughan によるもので，

$$\sum_{n\leqq x}q_k(n)=\frac{x}{\zeta(k)}+O(x^{\frac{1}{k+1}+\varepsilon}), \qquad \forall\varepsilon>0$$

特に，$k=2$ に対しては，もう少しよく，

$$\sum_{n\leqq x}|\mu(n)|=\frac{x}{\zeta(2)}+O(x^{\frac{9}{28}+\varepsilon}), \qquad \forall\varepsilon>0$$

が証明されているが，未だ予想には遠いようである．

同様な定理はまだまだたくさんあるが，ここらで，$\zeta(s)$ とは一見直接関係なさそうに見える Farey 分数の話に移ろう．

位数 $N\in\boldsymbol{N}$ の Farey 分数(列)とは，分母が N を越えない，$(0,1]$ 区間内の既約分数全体のなす列のことである．たとえば，位数 3 の Farey 数列は $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}$ の 4 個である．明らかに位数 N の Farey 数列中の元の個数は

$$\phi(1)+\cdots\cdots+\phi(N) \quad (=\Phi(N) \text{ と書く})$$

である．ただし，$\phi(n)$ は Euler の関数[3]で，$1,\cdots,n$ のうち，n と

3)　$\phi(n)$ の生成関数は $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ であるが，重み付きでない $\phi(n)$ 自身の和と R. H. を結び付ける命題は知られていないようである．

互いに素なものの個数を表わす.

Farey 分数を大きさの順に並べて, $r_\nu(\nu=1,\cdots,\Phi(N))$ と書き,

$$\delta_\nu = r_\nu - \frac{\nu}{\Phi(N)}$$

($\dfrac{\nu}{\Phi(N)}$ は $(0,1)$ を $\Phi(N)$ 個の等間隔に分ける分数) と置くとき,

定理 1.10 (Franel) R. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\Phi(N)} {\delta_\nu}^2 = O\left(\dfrac{1}{N^{1-\varepsilon}}\right)$ が, $\forall\varepsilon>0$ に対して成り立つ.

また別の形で,

定理 1.11 (Landau). R. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\Phi(N)} |\delta_\nu| = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が, $\forall\varepsilon>0$ に対して成り立つ.

定理 1.11 の条件の左辺を,

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(N)} e^{\frac{2\pi i\nu}{\Phi(N)}}\delta_\nu, \qquad \text{あるいは} \qquad \max_{1\leqq B\leqq\Phi(N)}\left|\sum_{\nu=1}^{B}\delta_\nu\right|$$

で置き換えたものも成り立つことを Landau は証明している. さらに Kopřiva によって, 上述の条件よりは弱いように思える次の条件もそれぞれ R. H. に同値であることが証明されている.

$$(1.5)\quad \sum_{\nu=1}^{\Phi(N)}\left({r_\nu}^2 - \frac{1}{3}\right) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$(1.6)\quad \sum_{\nu=1}^{\Phi(N)}\left({r_\nu}^3 - \frac{1}{4}\right) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$(1.7)\quad \sum_{\nu=1}^{\Phi(N)}\left(r_\nu - \frac{1}{4}\right) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

また, $M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ と, 定理 1.10, 1.11 の条件式, (1.5)—(1.7) との同値性の別証は Zulauf によっても与えられている.

§2. 関数解析から

本節では, Beurling の定理 (定理 2.1) とそこに現われる空間をもう少し細かくした Zorn 部分空間に関する定理を 2 つ述べる.

これらはどれも $L^p(0,1)$——すなわち，$(0,1)$ 上定義された複素数値可測関数 $x(t)$ で，$|x(t)|$ がこの区間で Lebesgue 可積分であるようなもの全体のなす空間——の部分空間である $(1 \leqq p \leqq \infty)$．$L^p(0,1)$ は周知のように，ノルム

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

により定義される距離に関する距離空間である．以下用いられる位相空間的用語は，この距離についてのものである．

さて，$x \in \boldsymbol{R}$ に対し，$[x]$ で x の整数部分，すなわち，$\max\{m \in \boldsymbol{Z} \mid m \leqq x\}$ を表わす．$\rho(x) = x - [x]$ と置くと，$\rho(x)$ は x の分数部分，すなわち，modulo 1 での x の代表元を表わす．$0 < x \leqq 1$ に対して，$\rho_\theta(x) = \rho\left(\dfrac{\theta}{x}\right) - \theta\rho\left(\dfrac{1}{x}\right)$ と置き，$\{\rho_\theta \mid 0 < \theta \leqq 1\}$ で生成されるベクトル空間を C で表わす．C はまた

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \rho(\theta_k/x), \qquad \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k = 0, \quad 0 < \theta_k \leqq 1$$

となるような関数 f の全体といってもよい．f はむろん，有界な可測関数で，$x > \max_k\{\theta_k\}$ で 0 である．

定理 2.1 (Beurling)　C が $L^p(0,1), 1 \leqq p \leqq \infty$ において稠密 $\Longleftrightarrow$ $\zeta(s)$ は $\sigma > \dfrac{1}{p}$ なる半平面で零点を持たない．

$\zeta(s)$ は必ず $0 < \sigma < 1$ なる帯状領域に零点——自明でない零点[4)]——を持つから，定理 2.1 の p は $1 \leqq p \leqq 2$ でないと意味を持たない．また C^p で C の $L^p(0,1)$ における C の閉包を表わすとき，定理の条件は $C^p = L^p(0,1)$ となる．

$\Longrightarrow$ の方の証明は割合簡単なので以下それを説明する．$s = \sigma + it$ を複素変数とすれば，

---

4)　§1 で述べた

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$$

は整関数であるから，$\zeta(s)$ は Γ の極，すなわち，負の偶数点で零点を持つ．これを自明な零点という．

$$x^{s-1} \in L^p(0,1), p<\infty \iff \sigma > \frac{1}{p'}$$

である．ここで p' は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ で定まる p の共役指数である．また，このとき，

(2.1)　$\|x^{s-1}\|_p = (1+(\sigma-1)p)^{-\frac{1}{p}}$

なることは容易に検証できる．

次に，$\sigma>0$ に対して積分

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)x^{s-1}dx$$

を考える．$\sigma>1$ に対して，明らかに

(2.2)　$\dfrac{\theta^s-\theta}{1-s}+\theta^s\displaystyle\int_1^\infty \rho(t)\,t^{-s-1}dt$

となるが，この第2項の積分は，Abel の変形法によって得られる

(2.3)　$\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s\displaystyle\int_1^\infty \rho(x)\,x^{-s-1}dx$

からわかるように $\zeta(s)$ と密接な関係にある．(2.3) は，$\sigma>1$ に対して定義された $\zeta(s)$ を $\sigma>0$ まで解析接続するが，$\rho(t)-\dfrac{1}{2}$ の Fourier 級数を使えば，これから関数等式が導びかれ，$\zeta(s)$ の全平面への解析接続が得られるのである．

(2.3) を (2.2) に代入すれば，

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)x^{s-1}dx = \frac{-\theta}{1-s} - \theta^s\frac{\zeta(s)}{s}$$

となる．したがって，C の任意の元 f に対して，

$$\int_0^1 f(x)\,x^{s-1}dx = -\frac{\zeta(s)}{s}\sum_{k=1}^{N} a_k\theta_k{}^s$$

となる（条件 $\sum a_k\theta_k=0$ が加えられた動機がここで見てとれる——極の部分をなくし，$\zeta(s)$ と f の積分を直接結び付けるためである）．

C は $L^p(0,1)$ で稠密だから，$L^p(0,1)$ の関数 -1 を C の関数を用いて，L^p-ノルムの意味でいくらでも近似することができる：$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists f\in C$ が存在して，

$$\|f+1\|_p < \varepsilon.$$

いま $\sigma > \dfrac{1}{p}$ であれば，Hölder の不等式と (2.1) により

$$\left|\int_0^1 (f(x)+1)x^{s-1}dx\right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)+1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |x^{s-1}|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= \|f+1\|_p \|x^{s-1}\|_{p'}$$
$$< \varepsilon\left(\frac{1}{p'\left(\sigma-\frac{1}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

ところが，この不等式の最左辺は

$$\frac{1}{s}\left(1-\zeta(s)\sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k{}^s\right)$$

であるから，結局

$$(2.4)\quad |1-\zeta(s)\sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k{}^s|^{p'} < \frac{\varepsilon^{p'}|s|^{p'}}{p'\left(\sigma-\frac{1}{p}\right)}$$

となる．

(2.4) の右辺が <1 となる s に対しては $\zeta(s) \neq 0$ である．すなわち，

$$(2.5)\quad \sigma > \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon^{p'}|s|^{p'}}{p'}$$

に対して，$\zeta(s) \neq 0$ であるが，$\varepsilon \to 0+$ とすれば，領域 (2.5) は次第に膨らんで，$\sigma > \dfrac{1}{p}$ を充塡するから，これで，定理 2.1 の $\Longrightarrow$ の部分が証明できた．

$\Longleftarrow$ の部分の Beurling による原証明は，$C^p \neq L^p$ とすれば $0 < x \leqq 1$ なる実数 x 全体のなす半群 S の指標――それは $x^\lambda, \lambda \in \boldsymbol{C}$ の形をしている――で $L^1(0,1)$ のある $p'-1$ 個の部分空間のいずれとも直交するようなものが $L^{p'}(0,1)$ に存在する $\left(\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda > -\dfrac{1}{p'}\right)$ ということを用いて，それが C と直交することから，特に $(s_0 = 1+\lambda)$，

$$0 = \int_0^1 \left(\rho\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\theta}\rho\left(\frac{\theta}{x}\right)\right) x^{s_0-1} dx$$

$$= \frac{\theta^{s_0-1}-1}{s_0}\zeta(s_0), \qquad 0<\theta<1$$

となり，$\mathrm{Re}\, s_0 > \dfrac{1}{p}$ なる ζ の零点 s_0 が見つかるという論法である．

定理 2.1 は，与えられた関数の集合が完備であるかどうかを決定する問題はつねに困難であるという事実を劇的なまでに例証するものである．実際，もし，C が完備であることが証明されれば，C 自身 Hilbert 空間になり，したがって，$L^2(0,1)$ と位相同型になるから，Beurling の定理 2.1 から R. H. が証明されてしまう．

$L^p(0,1)$ は先に述べたように非常に抽象的な集合であるのに引き換え，完備性の問題に現われる関数は具体的に与えられたものである．その関数の集合 C が完備であることを示すには何らかの深い数学が必要とされる道理である．

次に，Beurling の定理をもう少し精密にした Bercovici-Foias の定理を紹介する．その系として，たとえば，次の定理が得られる．

定理 2.2 (Bercovici-Foias)　$x \geqq 1$ で 0 で，$[0,\infty)$ で有界変動なある連続関数 $F(x)$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(F(2kx)-F((2k-1)x))$$

と表わされるような関数 f のなすベクトル空間を Z で表わし，$L^p(0,1)$ における Z の閉包を Z^p で表わせば，次が成り立つ：

$1 \leqq p \leqq 2$ に対して，$\zeta(s)$ は $\sigma > \dfrac{1}{p}$ なる零点を持たない
$\Longleftrightarrow \quad Z^p = Z^1 \cap L^p(0,1)$.

彼らの主定理を述べるために，少し記号の準備をする．$[0,1]$ 上の可測関数 f に対して

$$\begin{aligned}(V(t)f)(x) &= e^{\frac{t}{2}}f(e^t x), & x &\in [0, e^{-t}]\\ &=0, & x &\in (e^{-t}, 1]\end{aligned}$$

で $V(t)$ を定義する．$V(t)$ を $L^2(0,1)$ に制限したものを $V_2(t)$

と書けば，$V_2(t)$, $t \geqq 0$ は $L^2(0,1)$ のユニタリー作用素で $\{V_2(t) \mid t \geqq 0\}$ は（強連続な）半群をなす．この半群上の調和解析を用いて Beurling の定理の精密化を行なうのが Bercovici-Foias の目的である．この $V(t)$ を用いて，$\{V(t)\rho_\theta \mid t \geqq 0\}$ で生成されるベクトル空間を Z_θ とし，$Z_\theta{}^p$ で $L^p(0,1)$ における Z_θ の閉包を表わす（$L^p(0,1)$ の Zorn 部分空間）．

$$Z_{1/2}{}^p = Z^p \ .$$

である．また，

$$V(t)\rho_\theta = e^{\frac{t}{2}}\rho_{\theta e^{-t}} - \theta e^{\frac{t}{2}}\rho_{e^{-t}}$$

だから，C は $V(t)$ で不変である．したがって，$0<\theta<1$ に対して，$Z_\theta \subset C$ である．これらの記号の下で，彼らの主定理は次の通り：

定理 2.4　$1 \leqq p \leqq 2$ に対し，次の条件はすべて同値：

（i）　$\zeta(s)$ は $\sigma > \dfrac{1}{p}$ で零点を持たない．

（ii）　$C^p = L^p(0,1)$.

（iii）　$Z_\theta{}^p \cap L^2(0,1) = Z_\theta{}^1 \cap L^2(0,1)$,　　$\exists\,\theta$,　$0<\theta<1$.

（iv）　$Z_\theta{}^p = Z_\theta{}^1 \cap L^p(0,1)$,　　$\exists\,\theta$,　$0<\theta<1$.

さらに，(iii), (iv) の $\exists\,\theta$ を $\forall\,\theta$ に置き換えた (iii)′, (iv)′ もこれらに同値である．

ここで，（i）$\Longleftrightarrow$（ii）はむろん Beurling の定理 2.1 にほかならない．

最後に，定理 2.2 は定理 2.4 と次の補題の特別な場合から得られることを注意しておこう．

$f \in L^p(0,1)$, $1 \leqq p < \infty$, $s \in [0,1]$ に対し，

$$f_s(x) = f\left(\frac{x}{s}\right), \qquad x \in [0,s]$$
$$= 0, \qquad x \in (s,1]$$

で関数 f_s を定義する．

補題 2.1　$\{f_s \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ で生成される $L^p(0,1)$ の閉部分空間

は，定理 2. 2 における F を用いて

$$g = \int_0^1 f_s dF(s)$$

と書ける関数 g の全体の集合の $L^p(0,1)$ における閉包と一致する．

§ 3. 保型関数の散乱理論から

この節では，Lax-Phillips による散乱理論の応用として彼ら自身の与えた，作用素 Z'' の半群およびそれに付随する散乱作用素 $\mathcal{S}''$ による R. H. の同値条件を簡単に説明する．著書の中で，Lax-Phillips は一般的な散乱理論から次第に具体化していっているため，R. H. のところだけ読んでも理解しづらいと思われるから，詳しく全部知りたい方には初めから通読されることを勧めることにして，ここでは，ともかく，どの記号が何を意味するか，あるいは一般論における対象をどのように具体化しているか，イメージを摘むことに重点を置いて述べる．

可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{D}_-$ と $\mathcal{D}_+$ で，それぞれ incoming space, outgoing space[5)] と呼ばれるものと，$\mathcal{H}$ に作用するユニタリー作用素の 1 パラメーター群 $U(t)$, $-\infty < t < \infty$ で次の関係にあるようなものを考える．

(3. 1) i)$_-$ $U(t)\mathcal{D}_- \subset \mathcal{D}_-$, $t \leqq 0$

i)$_+$ $U(t)\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}_+$, $0 \leqq t$

ii) $\bigcap_{t<0} U(t)\mathcal{D}_- = 0 = \bigcap_{t>0} U(t)\mathcal{D}_+$,

iii) $\overline{\bigcup_{t<0} U(t)\mathcal{D}_-} = \mathcal{H} = \overline{\bigcup_{t>0} U(t)\mathcal{D}_+}$.

$\overline{}$ は閉包を表わす．

これに対して，次のような普遍的なモデル構造がある．

定理 3. 1 (移動表現定理) $\mathcal{H}$ が Hilbert 空間，$U(t)$ はユニタ

---

5) p. 107 上から 12 行目における訳語に対応して和訳してもよかったが，あまり馴染みがないようなので，そのまま英語の単語を使った．

リー作用素の1パラメーター群，$\mathscr{D}_-$ は $\mathscr{H}$ の部分空間で $(3.1)_-$ を満たすとすれば，$\mathscr{H}$ は $L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N}_-)$ と表現でき（$\mathfrak{N}_-$ はある Hilbert 空間），

i）　$U(t)$ の $\mathscr{H}$ での作用は $L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N}_-)$ における t だけの右移動に対応する．

ii）　$\mathscr{H} \longleftrightarrow L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N}_-)$ はユニタリーな対応である．

$\text{iii})_-$　$\mathscr{D}_- \longleftrightarrow L^2(\boldsymbol{R}_-, \mathfrak{N}_-)$．

同様に，$\mathscr{D}_+$ が $(3.1)_+$ を満たせば，$\mathscr{H}$ は $L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N}_+)$ と表現され，$\mathscr{D}_+$ は $L^2(\boldsymbol{R}_+, \mathfrak{N}_+)$ に対応する（$\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_-$ はそれぞれ正，負の実数全体を表わす）．

これらの表現は（$\mathfrak{N}_\pm$ の自己同型を除き）本質的にユニークであって，それぞれ incoming 移動表現，outgoing 移動表現とよばれる．$\mathfrak{N}_-$ と $\mathfrak{N}_+$ は同型であるから，$= \mathfrak{N}$ と置いて同一視する．$\mathrm{k} \in \mathscr{H}$ を表現する関数を k_-, k_+ と置いて，それぞれ incoming representer, outgoing representer という．

$$S : k_- \longrightarrow k_+$$

なる作用素 S を散乱作用素（scattering operator）という．S は移動と可換で，$L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N})$ からそれ自身へのユニタリー写像である．以下

(3.1)　iv）　$\mathscr{D}_-$ と $\mathscr{D}_+$ は直交する．

と仮定する．そうすれば，

$$(3.2)_- \qquad SL^2(\boldsymbol{R}_-) \subset L^2(\boldsymbol{R}_-),$$

$$(3.2)_+ \qquad S^*L^2(\boldsymbol{R}_+) \subset L^2(\boldsymbol{R}_+).$$

さて，$U(t)$ の移動表現は，Fourier 変換によって，スペクトル表現になる：

$$(3.3) \qquad \tilde{k}_\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{izs}k_\pm(s)\,ds$$

と置けば，

定理 3.2（スペクトル表現定理）　(3.1) の i)—iii) が成り立つ

とすれば，

i） (3.3) による対応 $\mathrm{k} \longleftrightarrow \tilde{k}_{\pm}$ は $\mathscr{H}$ から $L^2(\boldsymbol{R}, \mathfrak{N})$ の上へのユニタリー写像である．

ii） $U(t)$ の作用は e^{izt} をかけることで表現される．

iii） 写像 $(3.3)_+$ の下で $\mathscr{D}_+$ に対応する空間は，上半平面 Π で正則かつ，その，$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{const.}$ に沿う 2 乗積分は $|\mathrm{Im}\, z|$ の減少関数であるような $\mathfrak{N}$ に値をとる関数の $\boldsymbol{R}$ 上の境界値からなる．$\mathscr{D}_-$ も同様に特徴づけられる．

この表現などを定理 3.1 におけると同様，incoming スペクトル表現などという．次にスペクトル表現における散乱作用素 S の作用を考える．

(3.4) $\quad \mathscr{S} : \tilde{k}_- \longrightarrow \tilde{k}_+$

なる作用素を定義する．(3.3) から

(3.5) $\quad \mathscr{S} = FSF^{-1}.$

F は Fourier 変換を表わす．

定理 3.3 i） $\mathscr{S}$ は，その値が $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N}$ に写像する作用素である関数 $\mathscr{S}(z)$ をかけることで作用する．

ii） $\mathscr{S}(z)$ の値はユニタリー作用素である．

iii） $\mathscr{S}(z)$ は，下半平面で定義され，その値が $\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}$ への縮小写像であるような解析関数の境界値である．

$\mathscr{S}(z)$ を散乱行列という．これが本節の冒頭で述べた $\mathscr{S}''$ に対応する．

Z'' に対応するものは，

(3.6) $\quad Z(t) = P_+ U(t) P, \qquad t \geqq 0$

で定義される作用素である．ここで P_+, P_- は射影作用素で，それぞれ，$\mathscr{D}_+$-成分，$\mathscr{D}_-$-成分を除く作用を持つ（(3.1), iv)）．

定理 3.4 a） 作用素 $Z(t), t \geqq 0$ は，

$$\mathscr{K} = \mathscr{H} \ominus (\mathscr{D}_- \oplus \mathscr{D}_+)$$

上の縮小作用素の強連続半群をなす[6]．

b)　$\forall \mathrm{k} \in \mathcal{H}$ に対して，$\lim_{t\to\infty} Z(t)\mathrm{k} = 0$.

c)　$Z(t)$ は $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ の両方を零化する．

ところで，モジュラー群 Γ は1次分数変換

$$w \longrightarrow \frac{aw+b}{cw+d}, \qquad ad-bc = 1,\ a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{Z}$$

により複素上半平面 Π に作用する．F を Γ の基本領域とし，$L^2(F)$ を不変 Riemann 距離に関して2乗可積分な F 上の関数の全体とする．スカラー積は

$$(f, g) = \iint_F \frac{f(x, y)g(x, y)}{y^2} dxdy$$

で定義される．

$$L_0 = y^2(\partial_x{}^2 + \partial_y{}^2) = y^2\Delta$$

を Laplace-Beltrami 作用素とする．L_0 は保型関数——すなわち，Π 上定義され，$f(\gamma w) = f(w)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ を満たすもの——に作用する．f を F に制限したものは保型性から由来する関係式を境界で満たさなければならないが，それが，L_0 の境界条件として働き，L_0 は Friedrichs の定理により自己共役作用素に拡張される．拡張されたものも同じく L_0 で表わせば，

定理 3.5　a)　$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ の点はすべて L_0 のスペクトル系に属する．

b)　$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ の外の L_0 のスペクトルは有限多重度を持つ有限個の固有値からなる．

したがって，$L = L_0 + \frac{1}{4}$ なる作用素は有限個の正の固有値を持つ．

さて，保型波動方程式

$$(3.8) \quad u_{tt} = y^2\Delta u + \frac{1}{4}u$$

6)　$\ominus$は直交補空間を表わす．

を考えよう．これは時刻 t に関する2階の方程式である：

(3.9)　$u_{tt} = Lu$

u の時刻に関する微分を新しい変数とすることによって，(3.9) は1階の方程式系に書き換えられる：

(3.10)　$u_t = v, \qquad v_t = Lu.$

$\{u, u_t\} = f(t)$ なる元の対はデータとよばれる．f_1 が $|L|^{\frac{1}{2}}$ の定義域に属し，f_2 が $L^2(F)$ に属するようなすべてのデータ $f = \{f_1, f_2\}$ の全体を $\mathscr{H}_0$ とする．

方程式 (3.8) に付随するデータ f のエネルギー $E(f)$ は次の2次関数で定義される：

(3.11)　$E(f) = \|u_t\|^2 - (u, Lu).$

これは t に関係しない――エネルギー保存則．

また (3.11) に付随する双1次エネルギー形式は

$$E(f, g) = (f_2, g_2) - (f_1, Lg_1)$$

で定義される．ただし，$f = \{f_1, f_2\}, g = \{g_1, g_2\}$.

さて，L は正の固有値を持つ固有ベクトルを有限個しか持たないから，それらを

$$Lq_j = \lambda_j^2 q_j, \qquad \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m, \quad \|q_j\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とすれば，ベクトル

$$f_j^{\pm} = \{q_j, \pm\lambda_j q_j\}$$

は A の固有ベクトルである：

$$Af_j^{\pm} = \pm\lambda_j f_j^{\pm}$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}.$$

また，A により，(3.10) は

$$f_t = Af$$

と書ける．

$\{f_j^{\pm} \mid j=1,\cdots,m\}$ で張られる $\mathcal{H}_0$ の部分空間を $\mathcal{P}$ とし，$\mathcal{P}$ の直交補空間を $\mathcal{H}_0'$ とする．すなわち $\mathcal{H}_0'$ は L_2-内積に関して f_1, f_2 共に q_j と直交するようなデータ f の全体である．$\mathcal{H}_0'$ 上でエネルギーは非負であるから，エネルギー・ノルムに関して $\mathcal{H}_0'$ を完備化することができ，その完備化を $\mathcal{H}_E'$ と書く．

エネルギー形式 E は技術的な扱いに困難があるため，それに比較的小さな量を加えた修正された正の2次形式 G が（$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ の完備化 $\mathcal{H}_G$, $\mathcal{H}_G'$ をつくるために）用いられているが，その役割は過渡的なものである．

さて，いよいよ，(3.8) に対する incoming space と outgoing space $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ を定義することができる．

incoming waves（後退波), outgoing waves（前進波）として我々が考えるのは (3.8) の解で x に依存しないものである．それらは，

$$(3.11)\quad u_{tt} = y^2 u_{yy} + \frac{1}{4}u$$

の解である．変数変換

$$(3.12)\quad s = \log y, \qquad v = \frac{u}{\sqrt{y}}$$

により，(3.11) は古典的な波動方程式

$$(3.13)\quad v_{tt} = v_{ss}$$

に帰する．(3.13) の一般解は

$$v = l(s+t) + r(s-t)$$

の形であり，第1項は左へ動く波に，第2項は右へ動く波に対応している．incoming (outgoing) solution とは，左（右）に動いて行く波であって，時間 $t<0$ ($t>0$) では $s<\log a$ ($a\geqq 2$) のとき 0 であるようなものである．変換 (3.12) を用いて，この概念を (3.11) の解に拡張することができ，さらに，(3.11) の一般解で，変数を対数にすれば，

(3.14)$_-$ $u(w,t)=\sqrt{y}\,\phi(ye^{t})$

(3.14)$_+$ $u(w,t)=\sqrt{y}\,\phi(ye^{-t})$

なる incoming, outgoing solutions が得られる．

incoming & outgoing subspaces $\mathscr{D}_\pm$ を，incoming & outgoing solutions の初期データの $\mathscr{H}_G$ における閉包として定義する．すなわち，

$$(3.15)\quad \begin{aligned} &\mathscr{D}_- \ :\ \{y^{\frac{1}{2}}\phi(y),\ y^{\frac{3}{2}}\phi'(y)\}\ \text{の閉包} \\ &\mathscr{D}_+ \ :\ \{y^{\frac{1}{2}}\phi(y),\ -y^{\frac{3}{2}}\phi'(y)\}\ \text{の閉包.} \end{aligned}$$

ただし，ϕ は C_0^∞ 級で，$y<a$ に対して 0 である．$\mathscr{D}_\pm$ は，(3.1) の i)，ii) と iv) を満たす――ただし，直交は E-直交の意味である．

ところで，$\mathscr{H}_E'$ に制限された $U(t)$ の incoming & outgoing subspaces としては $\mathscr{D}_\pm$ は適当でなく，それから導かれる次の 2 つの対が適当なものである：

$$\mathscr{D}_-' = Q'\mathscr{D}_-, \qquad \mathscr{D}_+' = Q'\mathscr{D}_+$$
$$\mathscr{D}_-'' = \mathscr{D}_- \cap \mathscr{H}_E', \qquad \mathscr{D}_+'' = \mathscr{D}_+ \cap \mathscr{H}_E'.$$

ただし，Q' は $\mathscr{H}=\mathscr{P}\oplus\mathscr{H}_E'$ から $\mathscr{H}_E'$ への E-射影である．この $\mathscr{D}_\pm', \mathscr{D}_\pm''$ に対して，散乱作用素 S', S''，散乱行列 $\mathscr{S}', \mathscr{S}''$ が定義される．また

$$\begin{aligned} &S_- \ :\ k_-'' \longrightarrow k_-' \\ &S_+ \ :\ k_+' \longrightarrow k_+'' \end{aligned} \qquad (k_\pm', k_\pm''\ \text{は representers})$$

なる散乱作用素を導入すれば，

$$S'' = S_+ S' S_-$$

が成り立ち，したがって，散乱行列に対して

$$(3.16)\quad \mathscr{S}'' = \mathscr{S}_+\mathscr{S}'\mathscr{S}_-$$

が成り立つ．

いまの場合には，(3.16) は $\mathscr{S}''=\mathscr{B}^2\mathscr{S}'$ ($\mathscr{B}$ は Blascke 積) の形になり，$\mathscr{S}'$ の explicit な公式と，$\mathscr{B}$ は $-i\lambda_j$ (λ_j は A の relevant な正の固有値――それは $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ だけである) を零点に持つこと

から,

$$(3.17)\quad \delta''(z) = -\left(\frac{z+i/2}{z-i/2}\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(iz)\zeta(2iz)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iz\right)\zeta(1+2iz)}.$$

これから明らかに,

定理 3.6　R. H. が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$\delta''(z)$ が半平面 $\mathrm{Im}\, z < \frac{1}{4}$ に極を持たない.

あるいはまた, 波の減衰性による十分条件もある：

定理 3.7 (Lax - Phillips)　$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log\|Z''(t)f\|_E \leqq -\frac{1}{4}$ となる f の稠密な集合 $\mathscr{K}$ に存在する $\Longrightarrow$ R. H. が成り立つ.

$\mathscr{K}$ の候補として, $Z''(t)[\mathscr{D}_-''\ominus\mathscr{D}_-^{\alpha''}]$, $t\geqq 0$, $(\mathscr{D}_-^{\alpha''} = U(-\alpha)\mathscr{D}_-'', \alpha\in \boldsymbol{R}_+)$ で張られる $\mathscr{K}''$ の稠密な集合を挙げているが, それに対して, 定理 3.7 の条件を検証するには, $\frac{1}{\zeta(s)}$ が $\sigma > \frac{1}{2}$ で収束すること（定理 1.4 参照）を示すのと同じ困難さがあることをも**証明している.**

彼らの印象では, 散乱理論を R. H. の証明に使えるとすれば, それは, $\mathscr{D}_-''$ を含まない $\mathscr{H}$ の特徴付けができた場合にのみ可能であろうということである.

§4. 拡散過程によるアプローチ

§3 では散乱理論であったが, 本節では拡散過程に結びつける Armitage [1] の試みを概説する. Riemann のゼータ関数の零点はあるエルミート作用素の固有値だから, R. H. が成り立つという見方はもともと Hilbert (-Pólya) によるものである. その視点を拡張して, Berry は $\zeta(s)$ の零点をある量子力学系のハミルトニアンの固有値に結びつける予想を述べている. 彼は, Montgomery の pair-correlation 予想に示唆されて, ユニタリー変換で不変な Gauss 分布を持つ複素数を成分とするエルミート行列を考察し, 数値計算によって, それらの固有値 E_j (すなわち, あ

るエネルギー・レヴェル）と $\zeta(s)$ の零点 $\frac{1}{2}+iE_j$ の間に密接な関係があること，特に，E_j の分布と，Riemann-Siegel 公式（第3章，§7）で与えられる分布との間に驚くべき相似性があることを確かめた．このことから，Berry は E_j があるエルミート作用素，すなわち，ある量子力学系のハミルトニアン H であることを予想し，それの満たすべき条件も述べている．Armitage は Hilbert の作用素，Berry のハミルトニアンの候補を与えているが，完全に証明してあるわけではなく，あくまで，「こうではないか？」という段階である．しかし，試みとしてはおもしろい．

出発点は，§1，(1.4) の Riemann 自身による証明の1つで，楕円シータ関数に対する Jacobi 変換公式

$$(4.1)\quad \theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}=\sqrt{t^{-1}}\,\theta(t^{-1}),\qquad t>0$$

を利用するところである．(4.1) は熱（拡散）方程式

$$(4.2)\quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad u(x,0)=\dot{\delta}(0)$$

（$\dot{\delta}$ は Dirac の周期デルタ関数）

の単位円 S^1 上の基本解

$$(4.2')\quad u(x,t)=\theta(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}e^{2\pi i n x}$$

を，$\boldsymbol{R}$ 上の解と比較することによって得られる．

$$t=\exp T,\qquad x=X\exp\left(\frac{T}{2}\right)$$

と置けば，(4.2) は

$$(4.3)\quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial X^2}U(X,T)+\frac{1}{2}X\frac{\partial}{\partial X}U(X,T)=\frac{\partial}{\partial T}U(X,T)$$

となる．

ここで，

$$U(X,\, T) = u\left(X \exp\left(\frac{1}{2}T\right), \exp T\right),$$

また初期条件は

$$U(X, 0) = \vartheta(X, 1)$$

で，時刻 T のとき，解は周期 $\exp\left(-\frac{1}{2}T\right)$ を持つ周期関数である．

(4.3) は Fokker-Planck 方程式の特別な場合

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}(XU) = \frac{\partial U}{\partial T}$$

と密接な関係がある．

§1，(1.4) 式の証明は，

(4.4)　$2\omega(t) = \theta(t) - 1$

と置けば，

(4.1′)　$1 + 2\omega(t) = \sqrt{t^{-1}}\,(1 + 2\omega(t^{-1}))$

となるから，これを，$\Gamma(s)$ の積分表示から直ちに得られる

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) t^{\frac{s}{2}-1}\omega(t)\,dt$$

に代入して

(4.5)　$\xi(s) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{s(s-1)}{2}\displaystyle\int_1^\infty \left(t^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + t^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(t)\,dt$

なる表示を引き出すものである．$t = \exp(T)$ と置けば，

(4.5′)　$$2\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_0^\infty \left\{\exp\left(\frac{1-s}{2}T\right) + \exp\left(\frac{s}{2}T\right)\right\}\omega(\exp T)\,dt$$

となる．これに合わせるために

$$V(X,\, T) = U(X,\, T) - 1,$$

$$2\Lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + X\frac{\partial}{\partial X}$$

と置いて，(4.3) を書き直す：

$$(4.3') \quad \Lambda V(X, T) = \frac{\partial}{\partial T} V(X, T).$$

(4.5′) より，

$$2\xi(s) - 1 = s(s-1)\int_0^\infty \left\{ \exp\left(\frac{1-s}{2}T\right) + \exp\left(\frac{s}{2}T\right) \right\} V(0, T)\, dT$$

となる．

(4.3′) は（縮小作用素の）半群を定義するから，resolvent $R(\lambda, \Lambda)\,(=(\lambda-\Lambda)^{-1})$ を適用すれば，

$$(4.6) \quad \frac{1}{s(s-1)}(4\xi(s)-2) = \left\{ R\left(-\frac{s}{2}, \Lambda\right) + R\left(-\frac{1-s}{2}, \Lambda\right) \right\} V(X, 0)\Big|_{X=0}$$

となる．$V(X, 0)$ は初期分布で，右辺は，$X=0$ における値を意味する．あるいは，§1 の $\Xi(\tau)$ を用いれば，(4.6) は

$$(4.6') \quad \frac{1}{1+4\tau^2}(4\Xi(\tau)-2) = R\left(-\tau^2, \left(2\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(2\Lambda+\frac{1}{2}\right) V(X, 0)\Big|_{X=0}$$

のように，1 つの resolvent でも書ける．

(4, 6′) の左辺 $= -4\times$((4.6) の右辺) とみて，次の関数を導入する．

$$(4.7) \quad \Phi(X, \tau) := \frac{1}{1+4\tau^2}\left\{ Z\left(X, \frac{1}{2}+i\tau\right) - 2(1-\exp(-\pi X^2)) \right\}$$
$$:= -4\left\{ R\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\tau, \Lambda\right) + R\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\tau, \Lambda\right) \right\} V(X, 0) + \frac{2\exp(-\pi X^2)}{1+4\tau^2}$$

$$= 2\int_0^\infty \Biggl(\biggl(\exp\Bigl(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\tau\Bigr)T + \exp\Bigl(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\tau\Bigr)T\biggr)\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2 e^T) \cdot\cos(2\pi n e^{\frac{T}{2}}X)\Biggr)dT + \frac{2\exp(-\pi X^2)}{1+4\tau^2},$$

$$\gamma(X) := \frac{1}{2}\exp(-\pi X^2) + \Bigl(2\Lambda+\frac{1}{2}\Bigr) \cdot\sum_{n\neq 0}\exp(-\pi n^2)\exp(2\pi i n X).$$

そうすれば，(4.6′) は

$$\text{(4.8)}\quad \biggl(\Bigl(2\Lambda+\frac{1}{2}\Bigr)^2+\tau^2\biggr)\Phi(X,\tau) = \gamma(X)$$

となる．$\frac{1}{2}+i\tau$ を $\xi(s)$ の自明でない零点とすれば $\Phi(0,\tau)=0$. さらに，$\Xi(\tau)$ の関数等式の一般化である $\Phi(X,\tau)=\Phi(-X,\tau)$ などから，Φ は，いくつかの境界条件を満たす．(4.8) とこれらの境界条件を満たす τ を特徴づけるために，関数解析——特に，perturbation 理論——を応用することが考えられる．

区間 $I=[0,\infty)$ で定義された関数のなす Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ で，$\Phi(X,\tau)$, $\gamma(X)$ を含むものが構成できたとし，(4.7) の $\Phi(X,\tau)$, $\gamma(X)$ が与えられて，τ が $\zeta\Bigl(\frac{1}{2}+i\tau\Bigr)=0$ を満たすものとする．実関数 $\alpha(X)$, $\beta(X)$ と恒等的には 0 でない $\theta(X)$ を

$$\Phi(X,\tau) = \alpha(X)+i\beta(X),$$
$$\Phi(X,\bar{\tau}) = \alpha(X)-i\beta(X),$$
$$(\beta(X),\theta(X))_0 = 0, \qquad (\alpha(X),\theta(X))_0 \neq 0$$

によって導入する．ここで，$(f,g)_0$ は $\mathcal{H}_0$ の内積．

$\mathcal{H}_0$ から $\gamma(X)$ で張られる部分空間上への射影 P_τ を

$$\text{(4.9)}\quad P_\tau f = -\frac{(f,\theta)_0}{(\alpha,\theta)_0}\gamma, \qquad f\in\mathcal{H}_0$$

で定義する（各 τ に 1 つずつ P_τ が対応する）．$P_\tau = P_{\bar{\tau}}$ に注意する．(4.8) と (4.9) から

$$(4.10)\quad \left\{\left(2\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2+P_\tau+\tau^2\right\}\Phi(X,\tau)=0$$

となり，P_τ は $\mathscr{H}_0$ 上の微分作用素 $\left(2\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2$ の perturbation を定義する．$-\tau^2$ は $\left(2\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2+P_\tau$ の固有値だから，この作用素の固有値がすべて負の実数であることをいおうというのがあり得べきアプローチである．

Armitage は，まず perturbation を除いた $\left(B=\Lambda+\frac{1}{2}\right)$

$$(B^2+\rho^2)\phi(X,\rho)=0$$

の解で，$\Phi(X,\tau)$ と同じ境界条件を満たすものを考え，固有関数系 $\phi_n=\phi_n(X,\rho_n)$（合流型超幾何関数による表示を持つ）および随伴固有関数系 $\phi_n{}^*=\phi_n{}^*(X,\rho_n)$（Kummer の関数による表示を持つ）一式を見出している．ここで，$\rho_n\in\boldsymbol{R}$ は

$$\pi^{-\frac{1}{2}i\rho_n}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\rho_n\right)=-\pi^{\frac{1}{2}i\rho_n}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\rho_n\right)$$

を満たす．$\{\phi_m,\phi_n{}^*\}$ は L_2-ノルム $\|\ \ \|$ に関して完全二重正規直交系をなす．

Armitage による $\mathscr{H}_0$ の定義は次の通り，H_{B^2} を $f\in L^2(I)$ で，$f^{(4)}$ まで存在して，I 上で絶対連続，$B^2f\in L_2(I)$ なる f のなす空間とし，$\|f\|+\|B^2f\|$ なるノルムに関する H_{B^2} の完備化を $\hat{H}_{B^2}$ とし，$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間の直和として，

$$\mathscr{H}_0=\hat{H}_{B^2}\oplus\boldsymbol{C}\Phi(X,\tau)\oplus\boldsymbol{C}\Phi(X,\bar{\tau})\oplus\boldsymbol{C}\gamma$$

と定義し，$\hat{H}_{B^2}$ の固有関数展開を念頭において，Parseval の公式が成り立つように，内積を定義すれば，$\mathscr{H}_0$ は Hilbert 空間になる．Schwarz の perturbation 定理を適用するのに，γ の部分に少し——$\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma,\phi_n{}^*)\phi_n=\gamma$ が I 上では条件付収束でしかないこと（有限区間では O. K.）——問題があることから，R. H. の証明にはいたっていない．

Armitage のもう 1 つのアプローチは，(4.3) と Fokker–Planck 方程式との関連から，Brown 運動の discrete な形と酔歩（ran-

dom walks）の関係に至り，（4.3）の酔歩の場合の類似から，ある多項式を求め，適当な極限操作の下で，その零点が $\Xi(\tau)$ の零点と一致することを示そうとするものである．

R. H. を示したとはいえないにせよ，きちんと数学的な部分が確立できる物理的アプローチ（拡散過程にせよ，量子力学系のハミルトニアンにせよ）は大変興味深いものに思われる．そういう意味では，Patterson［5］にある Feynman の理論などを使う部分もここに含まれよう．第5章，特に §§ 5.16, 18, 19 参照．

文献についての注意．第4, 5章の文献は本文中で直接引用・参照したものにとどめてあり，この他にも参照すべきものは多い．特に，他章で頻雑に引用されている Landau の Handbuch（または Primzahlen と略称される），Ivić の Riemann zeta-function, Edwards の Riemann zeta-function は大いに関連のある記述を含む．また，Riemann 予想とは銘打ってはいないが，黒川［K］にも興味深い多くの記述がある．

［補遺］　$\pi(x)(\psi(x))$ に対する Littlewood による Ω-結果 (1.2)（p. 89, 12 行目）は非常に興味深い．しばしば Littlewood の論法とよばれる方法で証明されたものである（［L 1］，［L 2］）．それは R. H. がなりたつ場合となりたたない場合の2通りの仮定をして，それぞれの場合に同じ結果を証明する論法である．これに関連して，Dirichlet L-関数に関する Deuring-Heilbronn 現象にも言及しておく必要があろう．$h(D)$ を（基本）判別式 $D<0$ の2次体 $Q(\sqrt{D})$ の類数とするとき，Gauss の類数予想 $h(D)\to\infty$, $D\to-\infty$ の証明（の最初の段階）は，$\boldsymbol{R}\ni s>1-\dfrac{c}{\log|D|}$ で $L(s,\chi)\neq 0$ なら，

$$h(D)>\frac{c_1\sqrt{|D|}}{\log|D|}$$

（$c, c_1>0$, 絶対定数）という Hecke の結果の後を受けて，Deuring が 1933 年に R. H. がなりたたなければ，十分大きい $-D$ に対し，$h(D)\geqq 2$ を示し，Mordell の改良の後，Heilbronn が 1934 年に G. R. H.（一般 Riemann 予想）がなりたたないとすれば，$h(D)\to\infty$, $-D\to\infty$ を示したことで，Hecke の結果と合せて，無条件に $h(D)\to\infty$, $D\to-\infty$ が示された．このことを Deuring-Heilbronn 現象という（[G] 参照）．Littlewood の論法の一般化である．

また，物理的な設定のもとで，R. H.（およびそれに関連した問題）を研究する方面における新しい文献 [B]，[J] を追加しておく．それ以前の文献もこの 2 つに引用してある．

●文献

[1] Armitage, J. V.: The Riemann hypothesis and the Hamiltonian of a quantum mechanical system, Number Theory and Dynamics, ed. by M. M. Dodson & J. Vickers, Cambridge Univ. Press 1989, 153-172.

[2] Bercovici, H. & Foias, C.: A real variable restatement of Riemann's hypothesis, Israel J. Math. 48 (1984), 57-68.

[3] Donoghue, Jr. W. F.: Distributions and Fourier transforms, Academic Press 1981.

[4] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Bd., Hirzel 1972; reprint, Chelsea 1969 $\left(2\frac{1}{2}\text{ vols in 1}\right)$.

[5] Lax, P. D. & Phillips, R. S.: Scattering theory for automorphic functions, Ann. of Math. Studies 87, Princeton UP, 1976.

[6] S. J. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta-function, Cambridge Stud. Adv. Math. Vol. 14, Cambridge Univ. Press, 1988.

[7] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function,

Oxford UP, 1951, 2nd ed. (rev. by D. R. Heath-Brown), Oxford UP, 1988.

[8] Zulauf, A.: The distribution of Farey numbers, J. Reine Angew. Math. 289 (1977), 209-213.

[K] 黒川信重, オイラー積の250年, (上), 数学セミナー, 1988. 9, 84-91, (下), 数学セミナー, 1988. 10, 67-74.

N. Kurokawa, Special values of Selberg zeta functions, Contemporary Math. 83 (1989), 133-150 (AMS).

[B] Berry, M. V.: Semiclassical formula for the number variance of the Riemann zeros, Nonlinearity, 1 (1988), 399-407.

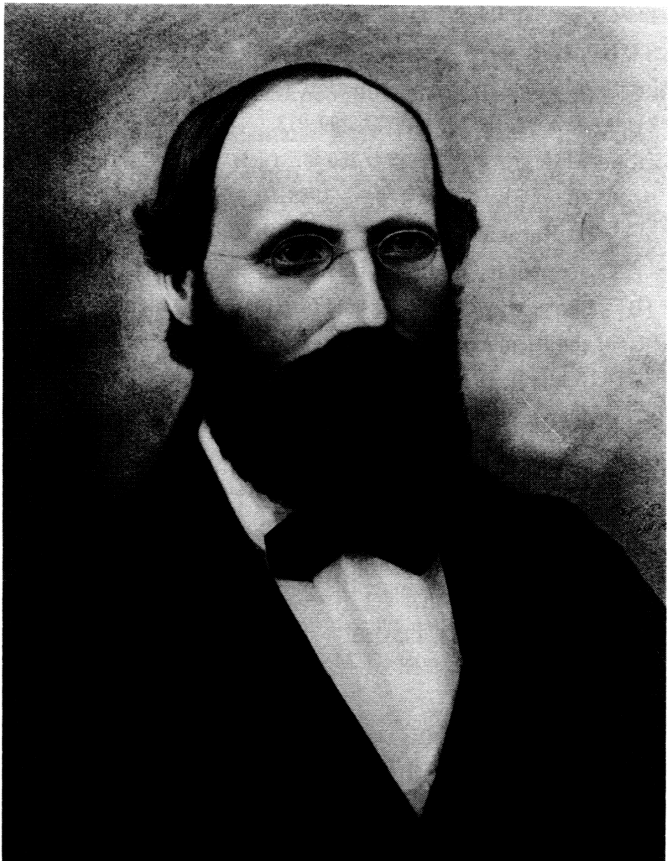
[G] Goldfeld, D.: Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields, Bull. Amer. Math. Soc. N. S., 13 (1985), 23-37.

[J] Julia, B.: Statistical theory of numbers, Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics, 47 (1990), 276-293.

[L1] Littlewood, J. E.: Sur la distribution des Nombres premiers, C. R. (1914) (全集 829-832).

[L2] リトルウッド, J. E.: リトルウッドの数学スクランブル, 近代科学社, 1990, pp. 124, 155-158.

[第4章担当／金光 滋]



リーマン

●第5章

Riemann 予想からの帰結

前章では，Riemann 予想（以下 R. H. と略記）に同値な命題を主に述べたが，この章では，主に R. H. からの帰結を述べる．もちろん，前章の同値命題も，R. H. が正しいと証明されれば，R. H. からの帰結であるのであるが，ここでは，R. H. の必要条件であるが十分条件ではない命題を述べることを主眼にする．

R. H. からの帰結のうち最も有名なものは恐らく Lindelöf 予想（L. H. と以下略記する）であり，L. H. と同値な命題，また L. H. からの帰結などいろいろなことが知られており，§1 では，L. H. について主に述べ，§2 では，R. H. を仮定した上での $\zeta(s)$ の零点分布を相対的宇宙論へ応用する Moser の理論を概説する．最後に，§3 で，R. H. の十分条件である Mertens 予想（その弱い形 (3.7) は §2 で用いることでもあるし）とそれに関連した話題，特に $M(x)$, $\psi(x)$ の明示公式と R. H. の関係を述べる．

§1. Lindelöf 予想と約数問題

L. H. とは，$\forall\varepsilon>0$ に対して

(1.1) $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^{\varepsilon}),\qquad t>0$

が成り立つことを主張するものである――Schwarz の鏡像原理より，(1.1) の右辺を $O(|t|^{\varepsilon})$ としても同じことである．(1.1) はまた

(1.2) $\zeta(\sigma+it)=O(t^{\varepsilon})$

が $\forall\varepsilon>0$, $\forall\sigma\geqq\frac{1}{2}$ に対して成り立つことと同値である．その理由は次の通りである：$\mu(\sigma)$ を

$$\zeta(\sigma+it)=O(t^{\xi})$$

となる ξ の下限とするとき，$\mu(\sigma)$ は連続，非増加，下に凸な関数で，非負の値をとる．$\sigma\geqq1+\delta$ $(\delta>0)$ で $\zeta(s)$ は有界であるから，

(1.3) $\mu(\sigma)=0,\qquad \sigma>1$

したがって，関数等式（前章 (1.3) または，以下の p.5，下から 4-6 行）から

(1.4) $\mu(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma,\qquad \sigma<0$

となる．連続性から，(1.3)，(1.4) はそれぞれ $\sigma=1, \sigma=0$ でも成り立つ．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,0)$ を結ぶ直線は

$$\mu(\sigma)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma$$

であるから，凸性により

$$\mu(\sigma)\leqq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma,\qquad 0<\sigma<1$$

特に，$\mu\left(\frac{1}{2}\right)\leqq\frac{1}{4}$，すなわち，$\forall\varepsilon>0$ に対して

(1.5) $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$

が成り立つ．

さて，(1.2) は，$\mu(\sigma)$ のグラフが

$$(1.2')\quad \begin{aligned} &\mu(\sigma) = \frac{1}{2}-\sigma, \qquad \sigma \leqq \frac{1}{2}, \\ &\mu(\sigma) = 0, \qquad \sigma > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

で与えられるという最も単純な予想を意味するのであり，また凸性から (1.1)，(1.2) ともに，$\sigma \geqq \frac{1}{2}$ に対して，$\mu(\sigma) = 0$ なることを意味するのである（図 5.1 参照）.

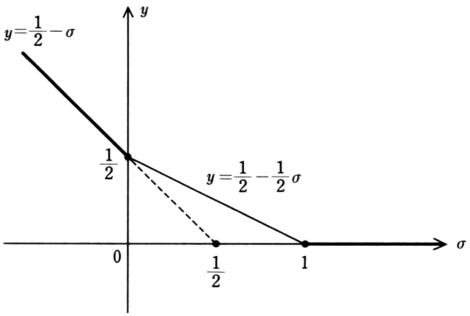


図 5.1

$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の評価で現在（その真偽はまだ確定していないが）最良のものは，8 乗平均の評価を通した Kuznetsov の $\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ という驚くべき大結果であるが（それ以前の $\frac{1}{4}$ をほんのわずか改良した Kolesnik らの結果を圧倒的に凌駕するもの)，(1.1) へ至る道という点からは前途茫漠という感を免れない.

定理 1.1　L. H. は次の 3 つの条件のそれぞれと同値である：

$$(1.6)\quad \frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt = O(T^{\varepsilon}), \qquad k \in \boldsymbol{N}$$

$$(1.7)\quad \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt = O(T^{\varepsilon}), \qquad \sigma > \frac{1}{2},\ k \in \boldsymbol{N}$$

$$(1.8)\quad \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k{}^2(n)}{n^{2\sigma}}, \qquad \sigma > \frac{1}{2},\ k \in \boldsymbol{N}$$

ただし（以下 pp. 124～126 で解説するように），

$$d_k(n)=\sum_{d_1\cdots d_k=n}1.$$

(1.6) $\Longleftrightarrow$ (1.7) は一般の凸性定理から従うものであり，(1.7) $\Longleftrightarrow$ (1.8) は Carlson の定理の証明の論法で示される．

(1.6) $\Longleftrightarrow$ L. H. について，$\Longrightarrow$ のみを証明する．L. H. が成り立たないと仮定すれば，$\exists\lambda>0$，$\exists$ 数列 $\frac{1}{2}+it_\nu$，$t_\nu\to\infty$ ($\nu\to\infty$) で，

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|>Ct_\nu{}^\lambda,\qquad C>0$$

となるようなものが存在する．また，前章の (2.3) 式を微分すれば，$u\geqq 1$ に対して $\exists E>0$ が存在して，

$$\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right|<Eu$$

となるから，$|t-t_\nu|\leqq t_\nu{}^{-1}$，かつ ν が十分大のとき，

$$\begin{aligned}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|&=\left|\int_{t_\nu}^{t}\zeta'\left(\frac{1}{2}+iu\right)du\right|\\&<E\max\{t,t_\nu\}|t-t_\nu|\\&<2E|t-t_\nu|t_\nu\ll 1<\frac{1}{2}Ct_\nu{}^\lambda\end{aligned}$$

となるから，$|t-t_\nu|\leqq t_\nu{}^{-1}$ なる t に対して

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|>\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|-\frac{1}{2}Ct_\nu{}^\lambda>\frac{1}{2}Ct_\nu{}^\lambda$$

となる．ここで，区間 $(t_\nu-t_\nu{}^{-1},t_\nu+t_\nu{}^{-1})$ が $\left(\frac{1}{2}T,T\right)$ に含まれるように適当に，T を，たとえば $\frac{1}{3}t_\nu$ ととれば，

$$\begin{aligned}(1.9)\quad \int_{\frac{1}{2}T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt&>\int_{t_\nu-t_\nu{}^{-1}}^{t_\nu+t_\nu{}^{-1}}\left(\frac{1}{2}Ct_\nu{}^\lambda\right)^{2k}dt\\&=2\left(\frac{1}{2}C\right)^{2k}t_\nu{}^{2k\lambda-1}\\&\gg T^{2k\lambda-1}\end{aligned}$$

となり，(1.9) の T を $\frac{1}{2}T,\frac{1}{4}T,\cdots\cdots$ で置き換えたものを加え

合わせれば,

$$\frac{1}{T}\int_1^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt \gg T^{2k\lambda-2}$$

となり，k が大のとき，これは (1.6) に反する.

定理 1.2　L. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow \forall k\in \boldsymbol{N}, \forall\sigma>\frac{1}{2}$,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n\leq t^\delta}\frac{d_k(n)}{n^s}+O(t^{-\lambda}), \qquad t>0 \tag{1.10}$$

が成り立つ．ただし，$0<\delta<1$ は与えられた数で，$\lambda=\lambda(k,\delta,\sigma)>0$ である.

すなわち，L. H. の下では，$\zeta^k(s)$ の臨界領域 $(0<\sigma<1)$ の右半分における挙動は，それに付随する Dirichlet 級数の最初の，t の任意に小さい正ベキ t^δ 個の，項の和で決定されるのである.

(1.10) を，証明されていない仮説なしで成り立つ強力な $\zeta(s)$ の近似式——近似関数等式——から導かれる結果と比較すれば，R. H. はいわずもがな，L. H. でさえもいかに強力であるか，換言すれば，証明できるとしても，恐らく，その証明は近似関数等式の証明よりも数倍困難なものであろうと思われる．念のため，近似関数等式を書いておけば，$0\leqq\sigma\leqq 1$, $x>h>0$, $y>h>0$, $2\pi xy=|t|$ のとき

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqq x}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leqq y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma}) \\ +O(|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}y^{\sigma-1})$$

ただし，$\chi(s)$ は $\zeta(s)$ の関数等式を

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$$

と書いたときに出てくるガンマ因子で,

$$\chi(s) = 2^{s-1}\pi^s\sec\frac{s\pi}{2}\bigg/\Gamma(s).$$

L. H. が仮定されているかいないかの差は，$\zeta(s)$（あるいは $\zeta^k(s)$）を近似する部分和の項の数の差として歴然と現われてくるのである.

定理 1.2 の $\Longrightarrow$ の部分の証明は Perron の公式の有限型を用いる．その際，生成関数は $\zeta^k(s)$ であるが，$c>1-\sigma+\varepsilon$ として，$\mathrm{Re}\, s=c$ 上の有限区間の積分をその左側の長方形の 3 辺に沿う積分（とその中での極における留数との和）に変えるとき，水平線上では，(1.2) が使えるということがポイントである．また $\Longleftarrow$ の部分は，

$$d_k(n)=O(n^{\varepsilon}), \qquad \forall \varepsilon>0$$

を用いて容易にわかる．

L. H. はまた Dirichlet（一般に Piltz）の約数問題と密接な関係にある．$d_k(n)$ を，n を k 個の自然数の積で表わす表わし方とするとき（あるいは $d_k(n)$ は

$$\zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n^s}, \qquad \sigma>1$$

で定義してもよい），その和は漸近式

$$\sum_{n\leqq x}d_k(n)=xP_k(\log x)+\Delta_k(x)$$

を満たす．ただし，$P_k(t)$ は $k-1$ 次の多項式で，$\Delta_k(x)$ については，α_k を $\forall \varepsilon>0$ に対して，

(1.11)　$\Delta_k(x)=O(x^{\alpha_k+\varepsilon})$

となる最小の数とするとき，

$$\alpha_k\leqq\frac{k-1}{k+1}$$

が Landau（$k=2$ の場合は Voronoï）によって知られている．

$$\alpha_k=\frac{k-1}{2k}$$

であろうと予想されている．

次に，β_k で $\Delta_k(x)$ の平均の位数，すなわち，$\forall \varepsilon>0$ に対し

(1.12)　$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \Delta_k{}^2(y)\,dy=O(x^{2\beta_k+\varepsilon})$

となる最小の数を表わすとき，$\beta_k\leqq\alpha_k$ は (1.11) を (1.12) に代

入すれば直ちにわかる．β_k は，Titchmarsh により，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}dt < \infty$$

となるような σ の下限 γ_k に等しいこと，さらに，$\sigma>\beta_k$ のとき，この積分は

$$\int_0^{\infty}\Delta_k{}^2(x)\,x^{-2\sigma-1}dx$$

に等しいことが証明されている．また，Hardy と Titchmarsh により，

$$\beta_k \geqq \frac{k-1}{2k}, \qquad \alpha_k(\geqq \beta_k) \geqq \frac{k-1}{2k} \qquad (k=2,3,\cdots)$$

が証明されているが，このことは，$\alpha_k=\dfrac{k-1}{2k}$ という予想は，α_k のとり得る値の最小値で，(1.11) という評価がなりたつことを要求するものである．α_k, β_k と L. H. との関係は次の定理に述べられている．

定理 1.3　L. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$ 次の (i)—(iii) のどれかが成り立つ：$k=2,3,\cdots$ に対し，

(i)　$\alpha_k \leqq \dfrac{1}{2}$,

(ii)　$\beta_k \leqq \dfrac{1}{2}$,

(iii)　$\beta_k = \dfrac{k-1}{2k}$.

Hardy による $\beta_2=\dfrac{1}{4}$, Cramér による $\beta_3=\dfrac{1}{3}$ と (iii) を，また α_k に対する予想 $\alpha_k=\dfrac{k-1}{2k}\left(<\dfrac{1}{2}\right)$, たとえば $\alpha_2=\dfrac{1}{4}$, $\alpha_3=\dfrac{1}{3}$, …… と (i) とを比較するとき，L. H. が本質的に関係してくるのは，$\Delta_k(x)$ の平均位数の方であって，$\Delta_k(x)$ 自身の位数ではないように思われる．

定理 1.3 の $\Longrightarrow$ の部分は定理 1.2 の $\Longrightarrow$ の部分の証明と同じく Perron の公式の有限形と (1.2) による．$\Longleftarrow$ の部分は，条件 (ii)（他の条件にはこれより強い）の下で，$\gamma_k \leqq \dfrac{1}{2}$ となるか

ら，

$$\int_{\frac{1}{2}T}^{T}\frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}dt = O(1), \qquad \sigma>\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\int_{\frac{1}{2}T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt = O(T^2), \qquad \sigma>\frac{1}{2}$$

と，（不等号の向きは逆の）（1.9）の類似物が得られ，これから，定理 1.1，（1.7）——で T^{ε} を T^{A} と代えたもの——が従う．

次に，Backlund による L. H. と $\zeta(s)$ の零点分布の関係を述べる．

定理 1.4　L. H. が成り立つ $\Longleftrightarrow$ $\forall\sigma>\frac{1}{2}$ に対して，

(1.13)　$N(\sigma, T+1)-N(\sigma, T) = o(\log T)$

が成り立つ．ここで，$N(\sigma, T)$ は，$\beta>\sigma, 0<\gamma\leqq T$ なる $\zeta(s)$ の零点 $\beta+i\gamma$ の個数を表わす．

R. H. が成り立てば，$\sigma>\frac{1}{2}$ に対して，$N(\sigma, T)=0$ であるから，定理 1.4 から R. H. $\Longrightarrow$ L. H.[1]．また直接に R. H. $\Longrightarrow$ L. H. が正しいことは，R. H. の下では $\log\zeta(s)$ は $\sigma>\frac{1}{2}$ で $s=1$ を除いて正則であるから，Borel - Carathéodory の定理，Hadamard の 3 円定理をうまく適用して，$\frac{1}{2}<\sigma_0<\sigma\leqq 1$ に対して，$\log\zeta(s)$ を上から評価することができて，（1.2）が従う．

前章 § 1 の諸定理を導くにも $\zeta(s)$ の大きさだけが必要なのなら（1.2）だけで十分である．それよりもむしろ大事なのは，R. H. の直接の帰結であるところの，$\log\zeta(s)$ あるいは $\frac{1}{\zeta(s)}$ などが $\sigma>\frac{1}{2}$ で（$s=1$ を除き）解析的であることである．

同じく零点分布に関する定理であるが，定理 1.1-1.4 が L. H. の同値条件を与えるのに対し，次の 2 つは，L. H. からの帰結である．

1）L. H. $\Longrightarrow$ R. H. かどうかは分かっていない．

$T>0$ のとき，$N(T)$ で $0\leqq\sigma\leqq 1$，$0<t\leqq T$ 内の $\zeta(s)$ の零点の個数を表わす．そのとき，Riemann によって予想され，von Mangoldt によって 1905 年に証明されたように，

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+S(T)$$

と置くとき，

$$S(T)=O(\log T)$$

が成り立つ．また，

$$S_1(T)=\int_0^T S(t)\,dt$$

と置けば，

$$S_1(T)=O(\log T)$$

もやはり条件なしで成り立つ．

定理 1.5　L. H. の下では

$$S(t)=o(\log t),\qquad S_1(t)=o(\log t)$$

ちなみに R. H. の下では，もう少し詳しく，

定理 1.6　R. H. の下で，

$$S(t)=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right),\qquad S_1(t)=O\left(\frac{\log t}{(\log\log t)^2}\right)$$

が成り立つ．

定理 1.1—1.6 の詳しい証明は Titchmarsh の書あるいは引用されている原論文を参照されたい．また零点密度定理（予想），連続する素数間の距離などについては述べられなかった．Ivić の書を見られたい．

§2.　Moser の宇宙論から

Mertens 予想（§3 参照）の弱い形（次節（3.7）式）

$$\int_1^x\left\{\frac{M(t)}{t}\right\}^2 dt=O(\log x)$$

（ただし，前章におけると同様 $M(t)=\sum_{n\leqq t}\mu(n)$）

の仮定の下で，$\zeta(s)$ の相続く零点[2)] $\frac{1}{2}+i\gamma', \frac{1}{2}+i\gamma''$ の間の距離（すなわち，相続く零点の縦座標の間隔）について評価式

$$\gamma''-\gamma' > \frac{A}{\gamma'}\exp\left(-A\frac{\log\gamma'}{\log\log\gamma'}\right)$$

が成り立つことはよく知られている（[6], 14. 31）．本節では，R. H. のみ仮定したとき，$\{\gamma', \gamma''\}$ の部分列に関するこの評価式の類似物の構成に際して Moser が得た $\zeta(s)$ の零点分布結果の相対的宇宙論への簡単な応用を述べよう．

宇宙定数を無視するとき，相対的宇宙論の基礎は次の Friedmann の方程式である：

$$(2.1)\quad \begin{cases} \kappa c^2\rho = \dfrac{3}{R^2}(kc^2+R'^2), \\ \kappa p = -\dfrac{2R''}{R}-\dfrac{R'^2}{R^2}-\dfrac{kc^2}{R^2}. \end{cases}$$

ここに，κ は重力定数，c は真空中の光速度，$\rho=\rho(t)$ は密度，$p=p(t)$ は圧力，$k=-1, 0, 1$，$R=R(t)$ は宇宙の「半径」であり，プライム“ ′ ”は時間 t に関する微分を表わす．

したがって未知数 3 個で方程式が 2 個で不定であるが，それは，「距離方程式」

$$F(\rho, p)=0$$

を付け加えて，(2. 1) を未知数 2 個の方程式として解くことになる――これが宇宙のモデルを構成する際の普通の方法である．

通例，$p=0$，すなわち，圧力 0 の宇宙のモデルが考察されるが，$p=\dfrac{c^2\rho}{3}$，すなわち，$\rho(t)$ が与えられたとき，$p(t)$ がその取り得る最大値となる場合も考察されている．

ところで，圧力と密度が物理量であるには，

$$(2.2)\quad \rho>0, \qquad p\geqq 0$$

なる不等式が成り立てば十分である．

---

2) R. H. を仮定しているから今 $\zeta(s)$ の自明でない無限個の零点はすべて $\sigma=\frac{1}{2}$ 上にあることを喚起されたい．

ここでは宇宙の「半径」を (2.3) で与えて，R. H. の下で (2.2) なる不等式が時刻 t のある区間で成り立つような，すなわち，その区間では物理的存在であるような宇宙のモデルを無限個構成する．「半径」を次のように定める：

(2.3)　$R(t)=|Z(t)|, \qquad k=1$

ただし，$Z(t)$ は Titchmarsh の書に同じく，$\chi(s)$ は §1 と同じ，すなわち，

$$\chi\left(\frac{1}{2}+it\right)=\pi^{it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)}$$

で，

$$(2.4)\quad \begin{cases} \vartheta(t)=-\dfrac{1}{2}\arg\chi\left(\dfrac{1}{2}+it\right) \\ Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\dfrac{1}{2}+it\right) \end{cases}$$

で定義されるものである．したがって，$R(t)=\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$.

(2.3) より，方程式 (2.1) は

$$(2.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\kappa c^2}{3}\rho(t)=\dfrac{c^2}{Z^2(t)}+\left\{\dfrac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 \\ \dfrac{\kappa}{2}p(t)=-\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{\dfrac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2-\dfrac{c^2}{2}\dfrac{1}{Z^2(t)} \end{cases}$$

となる．これから，明らかに，すべての $t\neq\gamma$ に対し，$\rho(t)>0$ となる．したがって，$p(t)\geqq 0$ となる t の区間を見出すことが問題であるが，Moser による次の公式

$$(2.6)\quad \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}=-\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

を用いて，(2.5) の p の式を

$$(2.7)\quad \frac{\kappa}{2}p(t)=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}-\frac{3}{2}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2-\frac{c^2}{2}\frac{1}{Z^2(t)} +O\left(\frac{1}{t}\right)$$

の形にしておく（(2.6) 式は $\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ の [6]，(2.12.7) 式と (2.4) の下側の式から $\frac{\zeta''}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ を 2 通りに計算することで得られる）．

さて，本節冒頭と同様，$0<\gamma'<\gamma''$ を $\zeta(s)$ の連続する零点の縦座標とし，$\{t_0\}$ を $t_0>0$ で

$$(2.8)\quad \begin{aligned} &(a)\quad \gamma'<t_0<\gamma'' \\ &(b)\quad Z'(t_0)=0 \\ &(c)\quad t_0\to+\infty \end{aligned}$$

となる t_0 の値からなる数列とする（これが存在することは，R. H. なしでも，すでに $\sigma=\frac{1}{2}$ 上に $\zeta(s)$ の零点が無限に多く存在することを保証する Hardy の定理から従う）．また，Littlewood-Titchmarsh の Ω-定理（[6]，定理 8.12）により，$\{t_0\}$ の無限部分列 $\{\tilde{t}_0\}$ で

$$(2.9)\quad |Z(\tilde{t}_0)|>A\exp(\log^{\beta}\tilde{t}_0),\qquad \beta<\frac{1}{2}$$

となるものが存在する．特に，これは

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tilde{t}_0\right)\right|>\frac{1}{\tilde{t}_0{}^{\alpha}},\qquad 0<\alpha\leqq1$$

をも満たし，$\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''$ を $\zeta(s)$ の連続する零点の縦座標で，$\tilde{\gamma}'<\tilde{t}_0<\tilde{\gamma}''$ とするとき，本節冒頭に述べた $\gamma''-\gamma'$ に対する下からの評価の Moser による類似は，

$$\tilde{\gamma}''-\tilde{\gamma}'>\frac{1}{\tilde{\gamma}'^{\alpha}},\qquad 0<\alpha\leqq1$$

である．さらに，

$$\Delta(t_0)=\min\{t_0-\gamma', \gamma''-t_0\}$$

と置くとき，Moser は

$$\Delta(\tilde{t}_0)>\frac{1}{\tilde{\gamma}^{\alpha}},\qquad 0<\alpha\leqq1$$

なることも証明している．これら 2 つの結果は $p\geqq0$ を証明する

ためには直接関係しないのであるが，記号の説明と議論の流れ上挿入した．

(2.7) 式に戻って，まず，Littlewood による次の評価

$$\gamma''-\gamma' < \frac{A}{\log\log\log\gamma'}$$

に注意する（Titchmarsh，定理 9.12）．これと (2.8) の (a) から

$$(2.10)\qquad \sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2} > \frac{1}{(\gamma''-\gamma')^2} > A(\log\log\log t_0)^2.$$

一方，(2.8) の (b) から $Z'(\tilde{t}_0)=0$ であることに注意して，(2.9)，(2.10) を (2.7) に代入すれば，

$$p(\tilde{t}_0) > A_1(\log\log\log\tilde{t}_0)^2 - A_2\exp(-\log^{\beta}\tilde{t}_0) - A_3\tilde{t}_0^{-1} > 0$$

となるから，$\tilde{t}_0$ の十分小さい近傍では $p(t)\geqq 0$ となる．すなわち，$\{\delta(\tilde{t}_0)\}$, $\delta(\tilde{t}_0)>0$ なる数列が存在して，

$$(2.11)\qquad \tilde{\gamma}' < \tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0) < \tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0) < \tilde{\gamma}''$$

$$(2.12)\qquad p(t)\geqq 0,\qquad t\in[\tilde{t}_0-\delta(\tilde{t}_0),\ \tilde{t}_0+\delta(\tilde{t}_0)]$$

となる．これで，問題の宇宙のモデルの無限列が構成された．

これだけ見ると，いささかこじつけめいた感じがするのであるが，実は，相対宇宙論を上述のような場合に適用すると，いろいろな結果が得られるのであって，Moser は (2.3) の代わりに $R(t)=Z(t)$ として，Friedmann の方程式を本質的に用いることによって，次の定理を証明している：$\bar{t}_0', \bar{t}_0''\in\{t_0\}$ が $Z(t)$ の零点 $\bar{\gamma}$ を隔離する相続く項であるとき，すなわち，

$$\bar{t}_0' < \bar{\gamma} < \bar{t}_0''$$

のとき，$(\bar{t}_0', \bar{\gamma})$，$(\bar{\gamma}, \bar{t}_0'')$ のどちらかが $Z(t)$ の屈曲点を含まないとき，$\bar{\gamma}$ は $Z(t)$ の1位の零点である（$Z(t)$ は $t_0', t_0''\in\{t_0\}$ が相続く項であるとき，区間 (t_0', t_0'') 上で極値をとるから，この区間内に $Z(t)$ の屈曲点は存在する．しかし，数値計算は，定理の

2つの区間は同時には屈曲点を含まない様子を示唆する).

最後に,(2.12) を用いて,

$$p(t\,;1) := \kappa p(t)$$

が無限個の零点を持つことを示してこの節を終わる.

$\bar{\gamma}$ が $Z(t)$ の $n(\bar{\gamma})$ 位の零点のとき,

$$\sum \frac{1}{(t-\gamma)^2} = \frac{n(\bar{\gamma})}{(t-\bar{\gamma})^2} + \sum_{\gamma \neq \bar{\gamma}} \frac{1}{(t-\gamma)^2}$$

であるから,

$$(2.13) \quad \lim_{t \to \bar{\gamma}} (t-\bar{\gamma})^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = n(\bar{\gamma})$$

また,$\bar{\gamma}$ は $\dfrac{Z'}{Z}(t)$ の $n(\bar{\gamma})$ 位の極であるから,

$$(2.14) \quad \lim_{t \to \bar{\gamma}} (t-\bar{\gamma})^2 \left\{ \frac{Z'(t)}{Z(t)} \right\}^2 = n^2(\bar{\gamma})$$

(2.7),(2.13),(2.14) から,γ の或る近傍(から γ を除いたもの)の t に対して,$p(t\,;1)<0$ となる.したがって,(2.12) と合わせて,$p(t\,;1)$ の連続性から,$p(t\,;1)$ は無限個の零点を持つ.

§3. 明示公式とその応用(Mertens 予想の反証)

本節では Riemann 予想が成り立つための十分条件をいくつか,特に Mertens 予想に重点を置いて述べる.以下の内容は主に Odlyzko-te Riele の論文と Titchmarsh の書による.

Stieltjes と Hermite の書簡集によれば,1885年の手紙で Stieltjes は $M(x)x^{-\frac{1}{2}}$ が上下2つの限界の間にあることを証明したと述べている.さらに括弧の中にこれらの限界が恐らく-1, $+1$ にとれるであろうと述べている.Stieltjes はその「証明」を発表しなかったけれども,彼が証明したと述べていること,およびその結果から導かれる重要な定理が数多くあることはかなり多くの数学者の知るところであった.Hadamard などは,前章§1で述べた有名な素数定理を証明した論文の中で「Stieltjes 氏は著者のものよりはるかに強力なゼータ関数の零点に関する定理を証

明しているが，著者の結果も，その証明の簡単さゆえに，興味なくもないのではなかろうか」と述べているほどである．

Stieltjesが$M(x)$を研究したのは，その大きさが，前章§1，定理1.3におけるように，R. H.と，すなわち，ゼータ関数の零点分布と密接な関係にあるからであるが，同じモーティヴェイションの下，Mertensは1897年に50ページにわたる$\mu(n)$と$M(n)$の表を$n=1, 2, \cdots, 10{,}000$に対して作成し，それによって，

$$(3.1)\qquad |M(x)| < x^{\frac{1}{2}}, \qquad x>1$$

なる不等式は「非常に確からしい」と推測した．Stieltjesによって初めて予想された(3.1)は今日Mertens予想の名でよばれている．もっとも，Odlyzko-te Rieleが，

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \limsup_{x\to\infty} M(x)x^{-\frac{1}{2}} > 1.06, \\ \liminf_{x\to\infty} M(x)x^{-\frac{1}{2}} < -1.009 \end{cases}$$

を証明して，Mertens予想(3.1)は成り立たないことがわかったので，もはや予想とはよべないかも知れないが．

さて，Mertens予想，あるいはその少し弱い形

$$(3.3)\qquad M(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$$

はどちらもR. H.からは出ないが，逆に，(3.3)からR. H.と$\zeta(s)$の零点が1位であることが容易に示される（前章，定理1.4参照）．実際，Abelの変形法により，$\sigma>1$に対し

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}}dx$$

となり，(3.3)より，右辺の積分は$\sigma>\frac{1}{2}$で正則な関数を定義するから，$\frac{1}{\zeta(s)}$の$\sigma>\frac{1}{2}$への解析接続を与え，したがって，特に，$\zeta(s)$は$\sigma>\frac{1}{2}$で零点を持たないことが従う．また，(3.2)の仮定の下で，積分表示から，

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqq |s|\int_1^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\sigma+1}}dx = \frac{|s|}{\sigma-\frac{1}{2}}$$

が得られるから，$\zeta(s)$ が k 位の零点 $\frac{1}{2}+i\gamma$ を持ったとすれば，或る $a>0$ に対して，$u \to 0+$ のとき

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+u+i\gamma\right)\right| \sim au^k$$

となって，$k>1$ なら矛盾が生ずる．

素数分布論では，$\pi(x), \psi(x)$ のような関数をゼータ関数の零点をくっきりした形で含む式で表わす公式——explicit formula（明示公式）——が知られており，$M(x)$ については，次の Titchmarsh の公式がある．

$$M_0(x) = M(x) - \frac{1}{2}\mu(x), \qquad x \in \boldsymbol{N},$$

$$M_0(x) = M(x), \qquad \text{その他の } x$$

と置くとき，R. H. の仮定の下で，$k \leqq T_k \leqq k+1$ なる数列 T_k が存在して

$$(3.4) \quad M_0(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T_k}} \frac{x^\rho}{\rho\zeta'(\rho)} - 2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(2\pi/x)^{2n}}{(2n)!\,n\zeta(2n+1)}$$

が成り立つ．ただし，$\rho = \frac{1}{2}+i\gamma$ は $\zeta(s)$ の自明でない零点を動く．

また，1 位でない零点が存在する場合は，(3.4) の形は少し修正を要するのであるが，零点が 1 位であることおよび R. H. はともに，(3.3) よりもさらに弱い次のいずれの条件からでも導かれる．（$A>0$ は定数として）

$$(3.5) \quad \limsup M(x)x^{-\frac{1}{2}} \leqq A,$$

$$(3.6) \quad \liminf_{x\to\infty} M(x)x^{-\frac{1}{2}} \geqq -A,$$

$$(3.7) \quad \int_1^x \left\{\frac{M(t)}{t}\right\}^2 dt = O(\log x)$$

((3.7) は §2 の冒頭で述べたものである)．

(3.4) は Mertens 予想の反証を目指すさまざまな努力の基礎になったものであり，それは次のような変形をしてみればうなずけることである．

$$(3.8)\quad x=e^y,\qquad -\infty<y<\infty$$

と置き（収束の問題は無視して），

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho\zeta'(\rho)}=e^{\frac{y}{2}}\sum_\rho \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}$$

となることに注意して，

$$(3.9)\quad m(y)=M(x)x^{-\frac{1}{2}}=M(e^y)e^{-\frac{y}{2}}$$

$$(3.10)\quad h(y)=\lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|<T_k}}\frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}$$

と置けば，(3.4) から

$$(3.11)\quad m(y)=h(y)+O(\min(1,e^{-\frac{y}{2}}))$$

となる．したがって，たとえば，(3.5) を反証するには，$y\to\infty$ のとき，

$$\limsup h(y)>\mathrm{A}$$

なることを示せばよいのであるが，$h(y)$ を定義する級数については，

$$(3.12)\quad \sum_\rho \frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|}=\infty$$

なること（これは $M_0(x)$ が平方数を含まない整数点で跳びを持つことからの帰結である）以外ほとんど何も知られていないので，直接に，これを行なう手段を持たないのである．Ingham は，$h(y)$ の代わりにもう少し扱いやすい関数に問題を帰着させることを得た．その原理は，信号 ($h(y)$) から特定の周波の成分を取り除くために，適当なフィルターを通すというもので，いまの場合は，このことは，$h(y)$ のコンヴォリューションを考えることに対応する．すなわち，$K(y)$ が都合の良い挙動をする関数として，

$$(3.13)\quad k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(y)e^{-ity}dy$$

が有界な台を持つようにとれれば，

$$h_K(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y-t)K(t)\,dt$$

は，(3.10) より，

$$(3.14)\quad h_K(y) = \sum_{\rho} k(\gamma)\frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}$$

のように，$h(y)$ の重み付き平均である．$h_K(y)$ が大なら，$h(y)$，したがって，(3.11) より $m(y)$ も大なることが次の定理のようにいえる．

定理 3.1 $K(y) \in C^2(-\infty, \infty), K(y) \geqq 0, K(-y) = K(y)$,

$y \to \infty$ のとき，　$K(y) = O((1+y^2)^{-1})$,

かつ，(3.13) で定義される $k(t)$ がある $T>0$ に対し，$|t| \geqq T$ なら $k(t) = 0, k(0) = 1$ を満たし，またゼータ関数の零点 $\rho = \beta + i\gamma$，$0<\beta<1$，$|\gamma|<T$ が $\beta = \frac{1}{2}$，かつ，1 位であると仮定する．そうすれば，$\forall y_0$ に対し，

$$\limsup_{y\to\infty} m(y) \geqq h_K(y_0),$$

$$\liminf_{y\to\infty} m(y) \leqq h_K(y_0)$$

が成り立つ．

定理 3.1 の条件を満たす最も簡単な $k(t)$ は恐らく Ingham の用いた Fejér 核

$$k(t) = \begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{T}, & |t| \leqq T, \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

であろう．(3.14) に代入すれば，

$$h_K(y) = 2\sum_{0<\gamma<T}\left(1-\frac{\gamma}{T}\right)\frac{\cos(\gamma y - \psi_\gamma)}{|\rho\zeta'(\rho)|}$$

となる．ただし，$\psi_\gamma = \arg \rho\zeta'(\rho)$．

(3.12) に注意すれば，$\gamma y - \psi_\gamma$ が 2π の整数倍に近くとれるとの仮定の下で，T を大きく選べば，$h_K(y)$ をいくらでも大きくで

きることになり，定理3.1からMertens予想が反証される．γ がもし $\boldsymbol{Q}$ 上1次独立ならば，Kroneckerの定理より，$\forall\varepsilon>0, \forall\gamma\in(0, T)$ と，ある整数 m_γ に対し，

$$(3.14)\quad |\gamma y-\psi_\gamma-2\pi m_\gamma|<\varepsilon$$

となるような y の整数値が存在することにより，$h_K(y)$ がいくらでも大きくできることになる．

さらに，Ingham は，

$$(3.15)\quad \sum_\gamma c_\gamma\gamma=0, \qquad c_\gamma\in\boldsymbol{Z}$$

のような関係式が有界個数あっても，$h_K(y)$ が有界でないことを示しており，一方（3.15）のような1次関係式がもし存在すれば，$h_K(y)$ の挙動はまったく任意的であることも示されている．(3.15）のような関係式が γ の間に成り立つことを示す合理的説明は何もありそうにないから，Ingham の観察から，Mertens 予想は偽であると考えた数学者は多かった．さらにこの懐疑主義は，Mertens 予想より弱い，$m(y)=O(1)$ なる予想を仮定すれば，(3.15) の形の関係式が無限個存在し，$c_\gamma=0, \pm1, \pm2$ で高々2個の c_γ が $|c_\gamma|=2$ を満たすという Bateman らの結果を得てますます強固なものとなったのであった．

その他にも Mertens 予想を反証する試みは Jurkat, Spira, Jurkat-Peyerimhoff, te Riele らにより行なわれ，コンピュータによる膨大な数値計算が行なわれたが，(3.2) には遠く及ばず，1.06 が 0.860, −1.009 が −0.843 がこれまでのレコードであった．

Odlyzko-te Riele の成功はコンピュータ・テクノロジーの発達のみによるわけではなく，ディオファンタス近似論における最新の強力な Lenstra-Lenstra-Lovász によるアルゴリズム（Odlyzko-te Riele はこれを L^3-アルゴリズムとよんでいる）によって，(3.14) を満たす y をうまく見出すことができたということによる．このことは数学研究におけるコンピュータの限界という

視点からも興味深い．

Mertens 予想の弱い形 (3.3) に関連して，$\psi(x)$ の場合に対応する状況を述べておく．前章§1に述べたように，R. H. の下では，

$$\psi(x)-x=O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

であるが，この評価は $O(x^{\frac{1}{2}})$ の形にはならず，

$$\psi(x)-x=\Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}}\log\log\log x) \tag{3.16}$$

が成り立つから，(3.3) が同様に反証できないかという希望が生ずる．ところが，(3.16) 式の証明は，明示公式の形から

$$\mathrm{Re}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{i\rho z}}{\rho}$$

が $z=0$ の近傍で有界でないことに基づいており，$M(x)$ の場合と同じ論法を用いようとすれば ((3.10) など参照)

$$\mathrm{Re}\sum_{\gamma>0}\frac{e^{i\rho z}}{\rho\zeta'(\rho)},\qquad \mathrm{Re}\,z>0$$

が同様の性質を持たねばならないが，そうでないことは Titchmarsh の書に示されている通りである．

$$M(x)=\Omega(x^{\frac{1}{2}})$$

しかわかっていないので，(3.3) は反証されていないが，

$$\limsup_{x\to\infty}|M(x)|x^{-\frac{1}{2}}=\infty$$

は，Odlyzko-te Riele も予想している．

かくて Mertens 予想は反証され，(3.3) も疑わしいということで R. H. を証明する路がまた1つ閉ざされたわけであるが，Mertens 予想そのものは長いあいだ偽であると信じられていたものであり，一方 R. H. および零点が1位であることは広く真であると信じられているという事情の違いがある．

最後に，$\psi(x)$ の場合の明示公式から導かれる R. H. の同値条件を述べる．Wintner [9] による．

(3.17)　$\rho_k = \frac{1}{2} + i\gamma_k, \qquad \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0, \qquad k \in \boldsymbol{N}$

を $\zeta(s)$ の上半面における相異なる零点の列とする (R. H. の仮定の下で). n_k を ρ_k の重複度,

$$\phi_0(x) = 0, \qquad \phi_m(x) = x^{-\frac{1}{2}}(A_m + \bar{A}_m), \qquad x > 1,$$

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{\rho_k} x^{\rho_k}, \qquad m \in \boldsymbol{N}$$

とするとき,

$$\phi(x) = \lim_{m \to \infty} \phi_m(x)$$

が存在し, 明示公式は ($x \neq p^n$ のとき)

(3.18)　$x - \psi(x) = x^{\frac{1}{2}}\phi(x) + \log[2\pi(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}].$

$x = p^n$ のとき, $\psi(x)$ は $\psi(x+0), \psi(x-0)$ の平均で置き換えるものとする. (3.17), (3.18) から, $N(T)$ の粗い評価を使って前章定理 1.2 およびそれに続く段落の結果が容易に従う. (3.17) 式は, Cramér により,

$$(\log \omega)^{-1} \int_2^{\omega} \left(1 - \frac{\psi(x)}{x}\right)^2 dx \to 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{n_k}^2}{|\rho_k|^2}, \qquad \omega \to \infty$$

あるいは, (3.18) を用いて,

$$(\log \omega)^{-1} \int_2^{\omega} x^{-2} \{x^{\frac{1}{2}}\phi(x) + \log[2\pi(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}]\}^2 dx$$

$$\to 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{n_k}^2}{|\rho_k|^2}, \qquad \omega \to \infty$$

と同値である. これは, さらに

$$(\log \omega)^{-1} \int_2^{\omega} x^{-2} \{x^{\frac{1}{2}}[\phi(x) - \phi_{m-1}(x)]$$

$$+ \log[2\pi(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}]\}^2 dx$$

$$\to 2 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{{n_k}^2}{|\rho_k|^2}, \qquad m \in \boldsymbol{N}, \qquad \omega \to \infty$$

と同値である. 上式の積分は

$$\int_2^{x} x^{-1} \{\phi(x) - \phi_{m-1}(x)\}^2 dx + o(\log \omega)$$

となるから，結局

$$T^{-1}\int_1^T [\phi(e^x)-\phi_{m-1}(e^x)]^2 dx$$

$$\to 2\sum_{k=m}^{m}\frac{{n_k}^2}{|\rho_k|^2}, \qquad T\to\infty$$

という同値条件が出る．

$$M\{g\} = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}\int_1^T g(x)\,dx,$$

$$s_m(x) = \phi_m(e^x), \qquad f(x) = \phi(e^x)$$

と置けば，

$$(3.19)\quad M\{(f-s_{m-1})^2\} = 2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{{n_k}^2}{|\rho_k|^2}.$$

定義から

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} n_k\left(\frac{e^{i\gamma_k x}}{\rho_k}+\frac{e^{-i\gamma_k x}}{\bar{\rho}_k}\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k\left(\frac{e^{i\gamma_k x}}{\rho_k}+\frac{e^{-i\gamma_k x}}{\rho_k}\right)$$

となり，明示公式は

$$e^x-\psi(e^x) = e^{\frac{x}{2}}f(x)+\log 2\pi+O(e^{-2x})$$

と述べられる．(3.19) から

$$(3.20)\quad M\{(f-s_m)^2\}\to 0, \qquad m\to\infty$$

となるが，このことは，$f(x)$ に対する上の三角級数が，単に収束するにとどまらず，それが表わす関数の Fourier 級数であることを示している．$f(x)$ の級数は sine 級数であるから，

$$f(x) = -f(-x), \qquad -\infty<x<-1,$$

$$f(x) = \text{任意}, \qquad -1\leqq x\leqq 1$$

と定義すれば，$M\{g\}$ の定義の

$$T^{-1}\int_1^T \quad \text{を} \quad (2T)^{-1}\int_{-T}^T \quad \text{で}$$

置き換えても (3.20) が成り立ち，$f(x)$ は Besicovitch class B^2 に属することになる．

したがって，概周期関数の理論が適用でき，

R. H. が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　素数定理の残余項に調和解析が成り立つ．

という標語的言い方が許されるであろう．

以上見たように，現在の R. H. 攻略法は，解析的数論の枠組みを大きく離れて物理的な設定で行なうというのが大多数を占めているように思われる．抽象化の一途を辿る現代数学の趨勢の中，ただ一人敢然と解析的数論の枠組みの中で R. H. の解決を目指したのは P. Turán であった．彼の最も重要な貢献はベキ和の方法の発明であって，以前はドイツ語とハンガリー語のみであったその著書の増補改訂版が英語で出版された [7] ので，興味ある読者はそれを参考していただくとして，前章 Pólya の定理 1.7 に関連した話題を1つ述べておく．

$\Xi(x)$ を Taylor 級数に展開して

$$\text{(3.21)}\quad \frac{1}{8}\,\Xi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\hat{b}_m x^{2m}}{(2m)!},$$

$$\hat{b}_m:=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^{2m}\Phi\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

とし，(3.21) で $z=-x^2$ とおいて，関数 F を

$$F(z):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\hat{b}_m z^m}{(2m)!}$$

で定義するとき，

R. H. が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$F(z)$ の零点がすべて負の実数

が成り立つ．

ところで，$F(z)$ が実数の零点のみを持つための必要条件は

$$(\hat{b}_m)^2>\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)\hat{b}_{m-1}\hat{b}_{m+1},\qquad m\in \boldsymbol{N}$$

という形の Turán の不等式が成り立つ，というものであるが，これが成り立つことは最近証明された（どれか1つでも成り立たな

ければ，R. H. も成り立たないのだが [1].

また Turán には，$\zeta(s)$ の部分和 $U_n(s)=\sum_{m=1}^{n} m^{-s}$ が十分大きいすべての n に対し，

$$\sigma>1 \text{ で } U_n(s)\neq 0 \Longrightarrow \text{R. H. が成り立つ},$$

などのいちじるしい結果があるが，その後いくつか研究が行なわれて，仮定がなりたたないことが証明されてしまった（[8]，Vol. 2, pp. 1184-5）．しかし，Turán の他の結果——条件付きの，零点のない領域の評価，Lindelöf 予想への寄与など——の重要性は失われていない．

[補遺] 第 4 章で述べた Lax-Phillips の波の伝播理論と類似ではあるが，それより多くの構造をもつ，de Branges による整関数のなす Hilbert 空間 $\mathscr{H}(E)$ の散乱理論における R. H. の十分条件にここで少し触れておきたい．de Branges による整関数の Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ は次の公理系で定義される．

(H 1) $F(z)\in\mathscr{H}$ が虚の零点 w をもてば，$F(z)\dfrac{z-\bar{w}}{z-w}\in\mathscr{H}$ で，$F(z)$ と同じノルムをもつ．

(H 2) $F(z)\to F(w)$ で定義される $\mathscr{H}$ 上の線型汎関数は虚の w それぞれに対し連続である．

(H 3) $F(z)\in\mathscr{H}$ のとき，$F^*(z):=\bar{F}(\bar{z})\in\mathscr{H}$ で，$F(z)$ と同じノルムをもつ．

(H 1)－(H 3) をみたす整関数の Hilbert 空間 $\neq\{0\}$ は次の $\mathscr{H}(E)$ と同型である：$E(z)$ を，$y>0$ に対して

$$|E(x-iy)|<|E(x+iy)|$$

をみたす任意の整関数とする．

$$K(w,z)=\frac{E(z)\bar{E}(w)-E^*(z)E(\bar{w})}{2\pi i(\bar{w}-z)}$$

とおく．整関数 $F(z)$ で

$$\|F\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(t)}{E(t)} \right|^2 dt < \infty,$$

かつ，$\forall z \in \boldsymbol{C}$ に対し，

$$|F(z)|^2 \leqq \|F\|^2 K(z, z)$$

をみたすものの全体を $\mathscr{H}(E)$ とすると，$\mathscr{H}(E)$ は (H 1)－(H 3) をみたし，標準的モデルをなす．

R. H. の十分条件が現われるのは $E(z-i)$ と $E^*(z)$ が1次従属（これは一般に，L-関数の関数等式と同値である）であるような $\mathscr{H}(E)$ に対してである．

定理（de Branges）　$\mathscr{H}(E)$ は上の通りとし，$F(z), F(z+i) \in \mathscr{H}(E)$ である限り，$\mathrm{Re}\langle F(t+i), F(t)\rangle \geqq 0$ がなりたつとする（$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathscr{H}(E)$ のノルムによる内積である）．このとき，w も $w+i$ も実数でなく，$E(w+i) \neq E(w-i)$ であるような $E(z)$ の零点 w はすべて，直線 $\bar{w} = w+i$ 上にある．

●文献

[1] Csordas, G., Norfolk, T. S. and Varga, R. S.: The Riemann hypothesis and the Turán inequalities, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 521-541.

[2] Moser, Ján: A certain new consequence of the Riemann hypothesis. (Russian) Acta Arith. **25** (1973/74), 307-311.

[3] Moser, Ján: Certain properties of the Riemann zeta function on the critical line. (Russian) Acta Arith. **26** (1974/75), 33-39.

[4] Moser, Ján: The inflection points of the function $Z(t)$. (Russian) Acta Arith. **28** (1975/76), 89-99.

[5] Odlyzko, A. M. and te Riele, H. J. J.: Disproof of the Mertens conjecture, J. Reine Angew, Math. 357 (1985), 138-160.

[6] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function, Oxford UP 1951, 2nd ed. (rev. by D. R. Heath-Brown), Oxford UP 1988.

[7] Turán, P. : On a new method in analysis and its applications, Wiley 1984.

[8] Turán, P. : Collected Papers, ed. by P. Erdös, 3 vols. Akademiai Kiado 1990.

[9] A. Wintner, On the asymptotic distribution of the remainder term of the prime-number theorem, Amer. J. Math. 57 (1935), 534-538.

[de B] The Riemann hypothesis for Hilbert spaces of entire functions, Bull. Amer. Math. Soc. N. S., 15 (1986), 1-17.

[第5章担当／金光 滋]

●第 6 章

Riemann ゼータ関数のいろいろな拡張

§1. Dirichlet 級数と Dirichlet L 関数

Riemannゼータ関数 $\zeta(s)$ は，数列 $\{a_n\}$ についての Dirichlet 級数

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

において，$a_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とした特別なものである．

Riemann 以前に，この特別な関数は実数 s に対してすでに Euler によっても考えられていた．彼は $\zeta(s)$ という記号は使わなかったけれども，$\zeta(2n)$ の値が Bernoulli 数で表わされること，そして Riemann より約 110 年前に $\zeta(s)$ の関数等式を発見していた（Ayoub [6]）．

Euler 以後，ゼータ関数の類似あるいは拡張は，いろいろ考えられ，最初にそれを考えた人の名をとって，たとえば Dirichlet L 関数，Dedekindゼータ関数などとよばれている．

a と $k>1$ を互いに素な自然数とするとき，Dirichlet は算術数列

$$a, a+k, a+2k, \cdots, a+nk, \cdots$$

の中に素数が無数に現われることを示すために，実変数 s を含む (1) の形の級数を調べた (Dirichlet の人柄や業績については，高木 [3] あるいは Dirichlet 全集の付録の Kummer による追悼記念講演 [8] に詳しく書かれている)．

これからは s を複素変数として，$s=\sigma+it$ と置く．(1) の Dirichlet 級数を収束する領域で s の関数とみて，$f(s)$ で表わそう．このとき，ある複素数 $s_0=\sigma_0+it_0$ に対して，

$$f(s_0)=\sum a_n n^{-s_0}$$

が収束するならば，半平面 $\sigma>\sigma_0$ において，$f(s)$ は s の正則関数になる．この Dirichlet 級数の収束する半平面を具体的に知るために，数列 $\{a_n\}$ の第 m 項までの部分和 S_m の評価をすることがある．すなわち，$S_m=\sum_{n=1}^{m} a_n$ がある正定数 B, c に対して

$$|S_m| \leqq Bm^c, \qquad m=1, 2, \cdots$$

を満たしているならば，$f(s)=\sum a_n n^{-s}$ は半平面 $\sigma>c$ で s の正則関数になり，かつ次のように積分表示される．

$$(2) \quad f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}S_n s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$$

$$=s\int_1^{\infty}\frac{S(x)}{x^{s+1}}dx$$

ただし，$S(x)=\sum_{n\leqq x} a_n \ (x>0)$ とする．

あるいは，ガンマ関数を用いるならば，$f(s)$ は

$$(3) \quad \Gamma(s)f(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nx}dx, \qquad \sigma>c+1$$

とも表わされる．

ところで，Riemann ゼータ関数の Euler 無限積表示

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$$

を一般化したものが Dirichlet 級数についても成立している．すなわち，互いに素な自然数 m, n に対して，$a_{mn} = a_m a_n$ となるならば，$f(s) = \sum a_n n^{-s}$ は絶対収束している半平面において，

$$f(s) = \prod_p (1 + a_p p^{-s} + a_{p^2} p^{-2s} + \cdots)$$

のように無限積で表わされる．ここで，p は素数全体を動く．さらに，無条件に $a_{mn} = a_m a_n$ が成り立つならば，同じ半平面で

$$f(s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s}}$$

と，Euler の無限積に表わされる．

2 つの Dirichlet 級数 $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ と $g(s) = \sum b_n n^{-s}$ の積は，これらが共に絶対収束している半平面で，

$$f(s) g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}} \right) n^{-s}$$

と表わされる．たとえば，$\sigma > 2$ において

$$(4) \quad \zeta(s) \zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) n^{-s}$$

である．また，Möbius 関数 $\mu(n)$ や Liouville 関数 $\lambda(n)$ を使うと，$\sigma > 1$ において

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}, \qquad \zeta(2s) \zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s}$$

がわかる．

さて，これまでは一般の Dirichlet 級数を扱ってきたのだが，その中でも特に重要な Dirichlet L 関数というものをここで定義しておこう．整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$ で表わすとき，自然数 f に対して $\boldsymbol{Z}$ 上の複素数値関数 χ が次の 3 条件を満たすならば，これを f を法とする Dirichlet 指標（以下では単に指標）とよぶ．

（i）　$\chi(mn) = \chi(m) \chi(n)$ が任意の整数 m, n に対して成り立つ．

（ii）　$\chi(m+f) = \chi(m)$ が任意の整数 m に対して成り立つ．

（iii）　$\chi(m) \neq 0$ となるのは，m と f が互いに素なときに限

る.

このとき，$(m, f)=1$ ならば $m^{\varphi(f)} \equiv 1 (\bmod f)$ となる．ただし，$\varphi(f)=f\prod_{p|f}(1-p^{-1})$ である．そこで (i)，(ii) から

$$\chi(m)^{\varphi(f)}=\chi(1)=1$$

である．すなわち，f を法とする指標は 0 かあるいは 1 の $\varphi(f)$ 乗根を値としてとる関数である．特に，$\chi(-1)^2=\chi(1)=1$ から $\chi(-1)$ は 1 または -1 である．$\chi(-1)=1$ のとき，χ を偶指標とよび，$\chi(-1)=-1$ のとき奇指標とよぶ．たとえば，

$$\chi_1(m)=\begin{cases} 1, & m\equiv 1 \bmod 2 \\ 0, & m\equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

$$\chi_2(m)=\begin{cases} 1, & m\equiv 1 \bmod 4 \\ -1, & m\equiv 3 \bmod 4 \\ 0, & m\equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

によって $\boldsymbol{Z}$ 上の関数 χ_1, χ_2 を決めれば，これらは 4 を法とする指標で，χ_1 は偶指標，χ_2 は奇指標となる．この χ_1 は 4 を法とする単位指標といわれる．χ_1, χ_2 以外に 4 を法とする指標はない．また，8 を法とする指標は 4 個あり，それらのとる値を表にすると次のようになる．

表 6.1

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$\psi_1(m)$	1	0	1	0	1	0	1	0
$\psi_2(m)$	1	0	-1	0	-1	0	1	0
$\psi_3(m)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\psi_4(m)$	1	0	1	0	-1	0	-1	0

ここで，ψ_1 は 8 を法とする単位指標であり，ψ_1, ψ_2 が偶指標で ψ_3, ψ_4 は奇指標である．

上のようにして定義された指標 χ に対して，$\sigma>1$ で定義され

る Dirichlet 級数 $\sum\chi(n)n^{-s}$ を対応させる．これを χ に対する Dirichlet L 関数とよび，$L(s,\chi)$ で表わす．つまり，

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

このとき，$S_m=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)$ は

$$|S_m|\leqq\varphi(f),\qquad m=1,2,\cdots$$

を満たしているので，すでに注意した Dirichlet 級数の性質から，$L(s,\chi)$ は $\sigma>0$ で s の正則関数になる．そして $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ がつねに成り立つので，$L(s,\chi)$ は

$$L(s,\chi)=\prod_p\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}},\qquad \sigma>1$$

と Euler の無限積に展開される．この場合，積分表示は，

$$\Gamma(s)L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{f}\chi(n)\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-nx}}{1-e^{-fx}}dx$$

となる．

さて，g を f の約数とするとき，g を法とする指標 ψ に対して

$$\xi(m)=\begin{cases}\psi(m), & (m,f)=1\ \text{のとき},\\ 0, & (m,f)>1\ \text{のとき}\end{cases}$$

で $\boldsymbol{Z}$ 上の関数 ξ を決めると，これは f を法とする指標になる．このとき，ξ は ψ によって引き起こされるという．たとえば，上の例で 8 を法とする指標 ψ_3 は 4 を法とする指標 χ_2 によって引き起こされている．

f を法とする指標 χ が f のすべての真の約数 g に対して，g を法とするどのような指標からも引き起こされないとき，χ を f を法とする原始指標という．再び上の例で見ると，χ_1 と ψ_1 は 1 を法とする単位指標から引き起こされているので原始指標でないし，ψ_3 も原始指標でない．そこで 4 および 8 を法とする原始指標はそれぞれ χ_2 および ψ_2,ψ_4 である．

ところで，f を法とする指標 χ が原始的でないとすれば，それはただ一つの原始指標 χ^* によって引き起こされる．このとき，χ

と χ^* に対する Dirichlet L 関数の間には

(5)　$L(s,\chi) = L(s,\chi^*)\prod_{p|f}(1-\chi^*(p)p^{-s}),\qquad \sigma>1$

という関係が成立している．これにより，原始指標に対する Dirichlet L 関数の性質がわかれば，一般の指標に対する Dirichlet L 関数のこともわかることになる．したがって，これからは χ を f を法とする原始指標とする．$f=1$ ならば，

$$L(s,\chi) = \zeta(s)$$

となるので $f>1$ としてよい．

さて，Dirichlet L 関数は，Riemann ゼータ関数の場合と似たような仕方で，全平面に解析接続されて，ある関数等式を満たしている．それを見てみよう．

χ が偶指標か奇指標かに応じて，a を 0 か 1 と置く．すなわち，$a=\dfrac{1-\chi(-1)}{2}$ とする．このとき

$$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{s+a}{2}-1}dx$$

において，x を $\dfrac{n^2\pi x}{f}$ で置き換えると，

$$\left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty n^a e^{-\frac{n^2\pi x}{f}}x^{\frac{s+a}{2}-1}dx$$

を得る．この両辺に $\chi(n)$ をかけて，n についての和をとれば，$\sigma>1$ において

(6)　$$\left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$
$$= \int_0^\infty x^{\frac{s+a}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^a\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{f}}dx$$

となる．ここで，

$$\varphi(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^a\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{f}},\qquad x>0$$

と置くと，これはテータ級数とよばれるもので，反転公式

(7)　$\tau(\bar{\chi})\varphi(x,\chi) = \left(\dfrac{i}{x}\right)^a\sqrt{\dfrac{f}{x}}\,\varphi\left(\dfrac{1}{x},\bar{\chi}\right)$

を満たしている．ただし，$\bar{\chi}$ は χ の複素共役指標であり，$\tau(\bar{\chi})$ は $\bar{\chi}$ に対して

$$\tau(\bar{\chi}) = \sum_{n=1}^{f} \bar{\chi}(n) e^{\frac{2\pi i n}{f}}$$

と定義される．これを $\bar{\chi}$ のGauss和とよぶ．このとき，χ のGauss和も同様に定義されて，

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1)f$$

を満たしている．そこで，

$$\chi(0) = 0, \qquad \chi(-n) = (-1)^a \chi(n)$$

に注意して，(6) を書き直し，次に積分区間を2つに分けて，(7) を使うと，

$$(8) \quad \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 + \int_1^\infty\right\} \varphi(x, \chi) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx$$
$$= \frac{i^a \sqrt{f}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^\infty \varphi(x, \bar{\chi}) x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_1^\infty \varphi(x, \chi) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx$$

となる．

$$\Phi(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \varphi(x, \chi) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx$$

とおけば，これは s の整関数で，(8) に代入して

$$(9) \quad \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) = \frac{i^a \sqrt{f}}{\tau(\bar{\chi})} \Phi(1-s, \bar{\chi}) + \Phi(s, \chi)$$

を得る．この式によって，$L(s, \chi)$ は複素平面全体に解析接続され，s の整関数になる．また (9) において，s を $1-s$, χ を $\bar{\chi}$ で置き換えると，関数等式

$$(10) \quad \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$

$$= \frac{\tau(\chi)}{i^a\sqrt{f}}\left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)L(1-s,\ \bar{\chi})$$

が生ずる．この等式は，Γ 関数の性質を使うなら

$$L(s,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^a}\left(\frac{2\pi}{f}\right)^s\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(s+a)}{2}\Gamma(1-s)L(1-s,\ \bar{\chi})$$

とも書ける．

(10) により，$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)^{-1}$ の零点から，$L(s,\chi)$ の零点が得られる．これらを $L(s,\chi)$ の自明な零点とよび，これら以外の零点を非自明な零点とよぶ．そこで，$L(s,\chi)$ の自明な零点はすべて1位であり，χ が偶指標 $(a=0)$ なら，$s=0, -2, -4, \cdots, -2m, \cdots$ で，奇指標 $(a=1)$ なら，$s=-1, -3, \cdots, -2m-1, \cdots$ である．また，$\sigma=1$ 上には $L(s,\chi)$ の零点がないことが知られているので，(10) から $\sigma \leqq 0$ には自明な零点しかないことになる．それゆえ，$L(s,\chi)$ の非自明な零点はすべて，帯領域 $0<\sigma<1$ にあることがわかる．

ところで，χ が実指標 $(\chi=\bar{\chi})$ ならば，

$$\tau(\chi) = i^a\sqrt{f}$$

が知られているので，(10) は明白に対称な次の形になる．

$$(11)\quad \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$
$$= \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)L(1-s,\chi).$$

ここで，例としてすでに見た，4 および 8 を法とする指標に対する Dirichlet L 関数を見よう．χ_2, ψ_2, ψ_4 は実原始指標であり，このうち χ_2 と ψ_4 が奇指標で，ψ_2 は偶指標であった．表1などから，$\sigma>1$ に対して

$$L(s,\chi_1) = L(s,\psi_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s),$$

$$L(s,\chi_2) = L(s,\psi_3) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

$$L(s,\psi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2n+1)^s},$$

$$L(s,\psi_4)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2n+1)^s}$$

である．$\chi=\chi_2,\psi_2,\psi_4$ に対する $L(s,\chi)$ が実軸上でどのように変化しているかを見るために，(11) などを使ってその概形を描くと，次の図6.1のようになる．

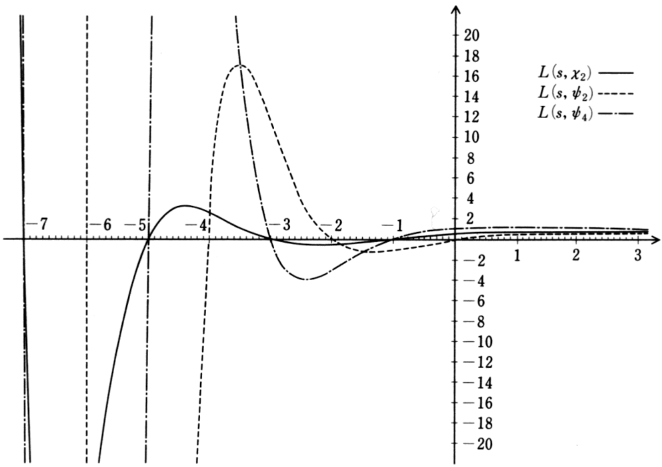


図6.1　$L(s,\chi)$のグラフ

これを見てもわかるように，$L(s,\chi)$ は実軸上において，$s\to+\infty$ とするとき，1に近づき，s を負の方にどんどん小さくするとき，自明な零点を通りながら，正負の値を交互にとるように振動し，徐々にその振幅を大きくしてゆく．ところで，$m=1,2,\cdots$ に対する $L(1-m,\chi)$ の値は，(11) を使わなくても，

$$\sum_{x=1}^{f}\frac{\chi(x)\,te^{xt}}{e^{ft}-1}=\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,\chi}\frac{t^m}{m!}$$

で定義される一般 Bernoulli 数 $B_{m,\chi}$ により

$$L(1-m,\chi)=-\frac{B_{m,\chi}}{m},\qquad m=1,2,\cdots$$

と求められる．参考までに，この式で計算された値を表にしておく．

表 6.2

m	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
$L(m,\chi_2)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{61}{2}$	0	$\frac{1385}{2}$	0
$L(m,\psi_2)$	0	-1	0	11	0	-361	0	24611	0	-2873041
$L(m,\psi_4)$	1	0	-3	0	57	0	-2763	0	250737	0

さて，f を法とする原始指標 χ に対する $L(s,\chi)$ の非自明な零点についての話でこの節を締めくくることにしよう（$f>1$）．

すでに見たように，$L(s,\chi)$ は領域 $\sigma\geqq 1$ に零点を持たないが，もし χ が実指標でないとすれば，ある絶対定数 $c>0$ が存在して，$\sigma=1$ を越えた領域

$$\text{(12)}\qquad \sigma\geqq\begin{cases}1-\dfrac{c}{\log f|t|}, & |t|\geqq 1,\\[2ex] 1-\dfrac{c}{\log f}, & |t|\leqq 1\end{cases}$$

で $L(s,\chi)$ は零点を持たないことも示される．しかしながら，χ を実指標とすると，少し事情は異なり，(12) の領域の実軸上にあるかも知れない高々 1 個の零点を除いて，$L(s,\chi)$ はこの領域で零にならないことが知られている．この例外的な零点は Siegel の零点とよばれ，いろいろなところで重大な影響を引き起こしている．たとえば，Siegel の零点が存在すれば双子素数（すなわち p および $p+2$ が素数となる自然数 p）が無数に存在することなどが知られている．

領域 $0<\sigma<1$, $0<t<T$ における $L(s,\chi)$ の零点の個数を $N(T,\chi)$ で表わせば,

$$(13)\quad N(T,\chi)=\frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{fT}{2\pi}\right)-\frac{T}{2\pi}+O(\log fT)$$

が成立している．この評価式は，$\zeta(s)$ に対する同じ領域内の零点の個数 $N(T)$ の評価式を一般化したものである．(13)によって，$L(s,\chi)$ の非自明な零点は無数にあることがわかる．

さらに，$\sigma=\frac{1}{2}$, $0<t<T$ にある $L(s,\chi)$ の零点についても，$\zeta(s)$ のときの Selberg の定理や Levinson の定理を一般化したものが成立している．

このように，Dirichlet L 関数は Riemann ゼータ関数の持つ基本的性質をほとんど受け継いでいる．そして Riemann 予想に対応して，$L(s,\chi)$ の非自明な零点がすべて $\sigma=\frac{1}{2}$ 上にあるという予想も出された．この拡張された Riemann 予想も今のところ特定の Dirichlet 指標 χ に対してすら，否定も肯定もされてはいない．

§2. Dedekind ゼータ関数

複素数 α が代数的数とは，ある自然数 m に対して

$$(14)\quad \alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\alpha+a_m=0$$

を満たす有理数 $a_1,\cdots,a_m$ がとれるときをいう．

k を複素数体の部分体とすれば，自然に k は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ を含むことになり，$\boldsymbol{Q}$ 上のベクトル空間とみられる．このベクトル空間の次元を有限とすれば，この体の元はすべて代数的数になる．そこで，このような体を代数的数体，あるいは単に代数体とよぶ．

代数的数 α に対して複素数体の部分体で α を含む最小のものを $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ と書くことにすれば，任意の代数体は適当な α をとって，この形に表わされる．

次に，代数的数にさらに条件をつけて制限した数を考えよう．

すなわち，(14) において，$a_1, \cdots, a_m$ を全部整数としてみよう．そのとき得られる α を代数的整数とよぶ．たとえば，$\sqrt{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ および 1 の n 乗根などは，それぞれ $x^2-2=0$, $x^2-x-1=0$ および $x^n-1=0$ の根だから，代数的整数である．

代数体 k の中で代数的整数になっている数全体を考えると，これは環になる．これを k の整数環とよび，$\mathfrak{o}_k$ で表わす．$\mathfrak{o}_k$ の部分集合 $\mathfrak{a}$ が

(i)　$\alpha, \beta \in \mathfrak{a} \Longrightarrow \alpha \pm \beta \in \mathfrak{a}$

(ii)　$\gamma \in \mathfrak{o}_k, \alpha \in \mathfrak{a} \Longrightarrow \gamma\alpha \in \mathfrak{a}$

という性質を持つとき，$\mathfrak{a}$ を k のイデアルという．特に $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{o}_k$ となるイデアル $\mathfrak{p}$ が $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_k$ に対して

$$\alpha\beta \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \alpha \in \mathfrak{p} \text{ または } \beta \in \mathfrak{p}$$

を満たすならば，$\mathfrak{p}$ を k の素イデアルという．このとき，$\mathfrak{o}_k$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ は

(15)　$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1{}^{e_1}\mathfrak{p}_2{}^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_s{}^{e_s}$

のように，素イデアルの積に一意的に表わされている．また，k の $\boldsymbol{Q}$ 上の次数を n とすると，$\mathfrak{o}_k$ は n 個の基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を持つ自由加群である．この基底に対して，n 次正方行列 $(\alpha_i{}^{(j)})$ の行列式を 2 乗した数を k の判別式とよび，D_k で表わす．ただし，k の共役体を $k=k^{(1)}, \cdots, k^{(n)}$ とするとき，$\alpha^{(j)}$ は同型 $k \longrightarrow k^{(j)}$ による α の像を表わしている．D_k は $\mathfrak{o}_k$ の基底のとり方によらずに決まる整数である．k がわかっているときには，$\mathfrak{o}_k, D_k$ をそれぞれ単に $\mathfrak{o}, D$ で書くことにする．

ところで，任意のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ も n 個の基底を持つ自由加群であるので，$\mathfrak{o}$ の部分加群としての $\mathfrak{a}$ の指数 $[\mathfrak{o}:\mathfrak{a}]$ は有限になる．これを $\mathfrak{a}$ の絶対ノルムとよび，$N\mathfrak{a}$ で表わす．すると，$\mathfrak{a}$ が (15) のように素イデアル分解されているならば，$N\mathfrak{a} = N\mathfrak{p}_1{}^{e_1}N\mathfrak{p}_2{}^{e_2}\cdots N\mathfrak{p}_s{}^{e_s}$ が成り立つ．

以上の準備のもとで，代数体 k の Dedekind ゼータ関数が定義

される．すなわち，$\mathfrak{a}$が (0) と異なる$\mathfrak{o}$のイデアル全体を動くときにできるDirichlet級数

$$(16)\quad \zeta_k(s) = \sum \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

のことを，最初にこれを考えたDedekindにちなんで，Dedekindゼータ関数という．この$\zeta_k(s)$は領域$\sigma>1$で収束して，sの正則関数になる．また，同じ領域で

$$(17)\quad \zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}}$$

とEulerの無限積に展開される（$\mathfrak{p}$は$\mathfrak{o}$の素イデアル全体を動く）．さらに$\zeta_k(s)$はsの関数として，全平面に解析接続され，$s=1$で1位の極を持つ以外は正則である．この$s=1$での留数は$2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}Rh/(w\sqrt{|D|})$である．ただし，$h$は$k$の類数，$r_1$および$2r_2$はそれぞれ$k$の実および虚の共役体の個数，$w$は$k$に含まれる1のベキ根の個数，$R$は$k$の単数規準を表わしている．

さて，基本的な代数体としては，2次体や円分体などがあるが，これらに対して，Dedekindゼータ関数をもう少し詳しく見ておこう．まず，kを有理数体としよう．すると，$\mathfrak{o}=\boldsymbol{Z}$となり，$(m)=m\boldsymbol{Z}$ ($m=0,1,2,\cdots$) 全体で$\boldsymbol{Z}$のすべてのイデアルが尽くされるので，$N(m\boldsymbol{Z})=m$を (16) に代入して，

$$\zeta_{\boldsymbol{Q}}(s) = \zeta(s)$$

を得る．

次にkを2次体としよう．このときは，平方因子を持たない整数dにより，$k=\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$とかけ，整数環は

$$(18)\quad \mathfrak{o} = \begin{cases} \boldsymbol{Z}+\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\boldsymbol{Z}, & d\equiv 1 \bmod 4 \\ \boldsymbol{Z}+\sqrt{d}\boldsymbol{Z}, & d\equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases}$$

と求められる．そこでkの判別式も

$$D = \begin{cases} d, & d \equiv 1 \bmod 4 \\ 4d, & d \equiv 2, 3 \bmod 4 \end{cases}$$

とわかる．

この2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ に対して，$|D|$ を法とする1つの固有な原始指標が対応する．それは次のように定義される．すなわち，奇素数 p に対しては Legendre 記号を使って

$$\chi(p) = \left(\frac{D}{p}\right)$$

で定め，素数2に対しては

$$\chi(2) = \begin{cases} 1, & D \equiv 1 \bmod 8 \\ -1, & D \equiv 5 \bmod 8 \\ 0, & D \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

と置く．このとき，自然数 $m = p_1{}^{e_1} p_2{}^{e_2} \cdots p_t{}^{e_t}$ に対しては

$$\chi(m) = \chi(p_1)^{e_1} \chi(p_2)^{e_2} \cdots \chi(p_t)^{e_t}$$

と定める．すると，自然数 m, n に対して

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$$

で，$\chi(m) = 0$ となるのは $(m, D) > 1$ のときに限ることがわかる．また，

$$m \equiv n \pmod{|D|} \Longrightarrow \chi(m) = \chi(n)$$

でもある．そこでこの式によって，χ の負の整数における値を定めると，χ は確かに $|D|$ を法とする実原始指標になる（高木 [2] § 44 参照）．

このようにして定められた指標 χ を2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の Kronecker 指標とよんで，改めて χ_D と書く．たとえば，$\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ および $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-2})$ の Kronecker 指標を求めると，これらの体の判別式はそれぞれ $-4, 8, -8$ なので，奇素数 p に対して

$$\chi_{-4}(p) = \left(\frac{-4}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\chi_8(p)=\left(\frac{8}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\chi_{-8}(p)=\left(\frac{-8}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}+\frac{p^2-1}{8}}.$$

そこで，p を奇数にしてもよいので，$\chi_{-4}, \chi_8, \chi_{-8}$ は前節の χ_2, ψ_2, ψ_4 に一致することがわかる．このとき

$$\chi_D(-1)=\begin{cases}1, & D>0\\ -1, & D<0\end{cases}$$

となる．逆に任意の実原始指標は必ずある2次体の Kronecker 指標に一致することも知られている．

さて素数 p が $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ において，どのように素イデアル分解されるかは，Kronecker 指標を使うと簡便な形で表現できる．

$$\chi_D(p)=1 \iff p=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \quad (\mathfrak{p}_1\neq\mathfrak{p}_2),$$
$$N(\mathfrak{p}_i)=p \quad (i=1,2),$$
$$\chi_D(p)=-1 \iff p=\mathfrak{p}, \quad N(\mathfrak{p})=p^2,$$
$$\chi_D(p)=0 \iff p=\mathfrak{p}^2, \quad N(\mathfrak{p})=p.$$

したがって

$$(19)\qquad \prod_{\mathfrak{p}|p}(1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}=\begin{cases}(1-p^{-s})^{-2}, & \chi_D(p)=1\\ (1-p^{-2s})^{-1}, & \chi_D(p)=-1\\ (1-p^{-s})^{-1}, & \chi_D(p)=0\end{cases}$$

となる．(17)，(19) から $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の Dedekind ゼータ関数は

$$(20)\qquad \zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)=\zeta(s)L(s,\chi_D), \qquad \sigma>1$$

と分解される．この両辺はともに全平面に解析接続されていて，$s=1$ のときにのみ極を持つので，等式は全平面で成り立っている．

ここで，§1のように $a=0,1$ を

$$\chi_D(-1)=(-1)^a$$

で決めておく．すると，すでに得ている $\zeta(s), L(s,\chi_D)$ の関数等式を辺々かけて，(20) および

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{2-2a}(2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s))^{a}$$

を使うとき

$$(21)\quad A^{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{2-2a}\Gamma(s)^{a}\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)$$
$$=A^{1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{2-2a}\Gamma(1-s)^{a}\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(1-s)$$

という関数等式を得る．ただし，$A=2^{-a}\pi^{-1}\sqrt{|D|}$ とする．

この関数等式により，$\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)$ の自明な零点がすべて求まる．すなわち，$\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ が実 2 次体 $(a=0)$ ならば，$\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)$ は $s=0$ で 1 位の零点を持ち，$s=-2,-4,\cdots,-2m,\cdots$ で 2 位の零点を持つ．虚 2 次体 $(a=1)$ ならば $s=-1,-2,\cdots,-m,\cdots$ で 1 位の零点を持つ．また，$\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)$ は領域 $\sigma\geqq 1$ に零点を持たないので，その非自明な零点はすべて帯領域 $0<\sigma<1$ にある．

さて，$T>0$ に対して，領域 $0<\sigma<1,\ 0<t<T$ にある $\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)$ の零点の個数を $N_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(T)$ で表わすと，これは前節の (13) で χ を単位指標および χ_D とした式から

$$(22)\quad N_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(T)=N(T)+N(T,\chi_D)$$
$$=\frac{T}{\pi}\log T+\frac{\log|D|-2-2\log 2\pi}{2\pi}T$$
$$+O(\log T)$$

と求められる．

3 番目の例として，1 の原始 l 乗根 ζ_l を使って $k=\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ と表わされている代数体の Dedekind ゼータ関数を見よう．この代数体は円の l 分体とよばれるもので，ここでは l を奇素数としておく．

素数 $p\neq l$ に対して，f を $p^f\equiv 1\pmod{l}$ となる最小の自然数，g を $(p-1)/f$ とすると，p は k において，

$$(p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_g,\qquad N\mathfrak{p}_i=p^f,\qquad 1\leqq i\leqq g$$

と分解している．これは，法 l の原始指標 ψ を一つ固定するとき

次のようにも表わされる．

$$\psi(p) \text{ が1の原始} f \text{ 乗根} \iff (p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_g, \quad N\mathfrak{p}_i = p^f$$

それゆえに l 以外の素数 p に対して

$$\prod_{\mathfrak{p}|p}(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} = (1-p^{-fs})^{-g} = \prod_{i=0}^{l-2}(1-\psi^i(p)p^{-s})^{-1}$$

が成立する．この式は，l を法とする単位指標 ψ^0 を1を法とする単位指標で置き換えると，l に対しても成立するので，$\zeta_k(s)$ は

$$\text{(23)} \quad \zeta_k(s) = \zeta(s)\prod_{i=1}^{l-2}L(s, \psi^i), \qquad \sigma>1$$

と分解される．この式も全平面で成立し，

$$D = (-1)^{\frac{l-1}{2}}l^{l-2}$$

などに注意すれば，$\zeta(s)$ と $L(s, \psi^i)$ に対する関数等式から，$\zeta_k(s)$ の関数等式も求められる．それは次の形になる．ただし，$A = (2\pi)^{-\frac{l-1}{2}}\sqrt{|D|}$ とする．

$$\text{(24)} \quad A^s\Gamma(s)^{\frac{l-1}{2}}\zeta_k(s) = A^{1-s}\Gamma(1-s)^{\frac{l-1}{2}}\zeta_k(1-s)$$

この関数等式から，$\zeta_k(s)$ の自明な零点は $s=0\left(\dfrac{l-3}{2}\text{位}\right)$ と $s=-1, -2, \cdots, -m, \cdots\left(\dfrac{l-1}{2}\text{位}\right)$ ですべてであることがわかる．

また，このときの $N_k(T)$ は2次体のときと同様にして

$$\text{(25)} \quad N_k(T) = N(T) + \sum_{i=1}^{l-2}N(T, \psi^i)$$

$$= \frac{l-1}{2\pi}T\log T + \frac{\log|D|+1-l-(l-1)\log 2\pi}{2\pi}T + O(\log T)$$

と求まる．

さて，一般の円分体およびその部分体（2次体もGauss和を用いれば，このように見なされる）についても，(23)，(24)，(25) とほとんど同様なことが成立している．しかし，一般の n 次代数

体 k では，このように都合よく，$\zeta_k(s)$ が Riemann ゼータ関数と Dirichlet L 関数のいくつかの積に表わせるとは限らない．ところが，そのときも別の方法で $(A=2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|D|})$

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
&A^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_k(s)\\
&\qquad=A^{1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(1-s)^{r_2}\zeta_k(1-s),\\
&N_k(T)=\frac{n}{2\pi}T\log T+\frac{\log|D|-n-n\log 2\pi}{2\pi}T\\
&\qquad\qquad+O(\log T)
\end{aligned}
$$

という関数等式と零点の個数の評価式が得られる．このとき，すでに得られた $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ および $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ の場合の (21)，(22)，(24)，(25) は，(26) の特別なものとして吸収されてしまう．

このように，代数体の Dedekind ゼータ関数も Riemann ゼータ関数の持つ基本的性質を受け継いでいるのである．また，上の $N_k(T)$ の評価式から $\zeta_k(s)$ の非自明な零点は問題の帯領域 $0<\sigma<1$ に無数に多く存在することがわかるが，それらがすべて $\sigma=\frac{1}{2}$ 上にあるという拡張された Riemann 予想は，その解決にはまだ程遠いというのが現状といえよう．しかし，この拡張された Riemann 予想を仮定すれば，いろいろおもしろい事実が成り立つことも知られている．たとえば，原始根に対する Artin の予想というのがある．それは，整数 a が 0，±1，完全平方数のいずれでもないとき，a を原始根に持つ素数が無数に存在するという予想である．もっと正確には，$x\geqq 1$ に対して

$$N_a(x)=\{p\,;\,p\text{ は }a\text{ を原始根として持つ }x\text{ 以下の素数}\}$$

とおくとき，a のみによる定数 $A(a)$ が存在して，近似式

$$\#N_a(x)\sim A(a)\frac{x}{\log x}$$

が成立するという予想である．ここで $\#N_a(x)$ とは集合 $N_a(x)$ の元の個数を表わしている．Artin 予想はまだ解けていないが，

もし平方因子を持たぬ自然数 n とその約数 m に対して作られるすべてのガロア体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt[m]{a}, \zeta_n)$ の Dedekind ゼータ関数に対して，拡張された Riemann 予想が正しいならば，それが成立することが知られている．

さて，この節の後半は虚2次体と純3次体の Dedekind ゼータ関数の別の表現を求めてみよう．すなわち，2次形式

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

により，それらが表わされることを見てみよう．以下では，a, b, c は整数とする．そして，b^2-4ac を $f(x, y)$ の判別式とよぶ．また，$(a, b, c)=1$ となる2次形式を原始的というが，判別式がある2次体の判別式と一致する2次形式は必ず原始的になる．ここでは，このような特別の判別式を持つ2次形式だけを考えよう．整数 D を固定して，判別式 D の2次形式全体の集合を次の同値関係で類別しよう．すなわち，2次形式 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ が同値とは，$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ となる整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ があって

$$f(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y) = g(x, y)$$

を満たすこととする．この同値を $f \sim g$ で表わせば，これは同値律を満たしている．

$\mathfrak{a} \neq (0)$ を判別式 D の2次体のイデアルとすると，$\mathfrak{a}$ は階数2の自由加群である．そこでその基底 α, β をとり，これらの共役を α', β' とすれば，$\mathfrak{a}$ に対して2次形式

$$f_{\mathfrak{a}}(x, y) = \frac{(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)}{N\mathfrak{a}}$$

を対応させることができる．この $f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ は整係数で判別式 D を持っている．$\mathfrak{b} \neq (0)$ に対しても $f_{\mathfrak{b}}(x, y)$ を作ると，

$$\mathfrak{a} \text{ と } \mathfrak{b} \text{ が狭義の同値} \iff f_{\mathfrak{a}}(x, y) \sim f_{\mathfrak{b}}(x, y)$$

がわかる．そこで $\mathfrak{a}$ の含まれる狭義のイデアル類に $f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ の含まれる判別式 D の2次形式の類を対応させると，これは1対1かつ上への対応である．

以上のことを基にして，虚２次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ の Dedekind ゼータ関数を２次形式で表わしてみよう（$d<0$ は平方因子なしとする）．この虚２次体の判別式を D とすると，この体に含まれる１のベキ根の個数 w は

$$w=\begin{cases}6, & D=-3\\ 4, & D=-4\\ 2, & D<-4\end{cases}$$

である．$\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ のイデアル類を全部並べて

$$C_1, C_2, \cdots, C_h$$

とする．ここで h はこの虚２次体の類数で，χ_D を使って

$$h=-\frac{w}{2|D|}\sum_{m=1}^{|D|}m\chi_D(m)$$

と求められる．この式から，たとえば $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-2})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-163})$ などの類数は１である．

さて，$\mathfrak{a}$ が(0) 以外の整イデアル全体を動くとすれば，

$$(27)\quad \zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)=\sum_{\mathfrak{a}\neq(0)}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}=\left\{\sum_{\mathfrak{a}\in C_1}+\cdots+\sum_{\mathfrak{a}\in C_h}\right\}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

となる．それゆえ，任意のイデアル類 C に対して $\sum_{\mathfrak{a}\in C}N\mathfrak{a}^{-s}$ を２次形式で表わせばよい．そこで，C の逆のイデアル類 C^{-1} からイデアル $\mathfrak{b}$ をとると，$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(\beta)$ となる $\mathfrak{b}$ の数 β が１のベキ根を除いて決まるので，$f_{\mathfrak{b}}(x, y)$ を用いると

$$(28)\quad \sum_{\mathfrak{a}\in C}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}=\frac{1}{w}\sum_{\beta\in\mathfrak{b}}{}'\left(\frac{N\mathfrak{b}}{N(\beta)}\right)^s=\frac{1}{w}\sum_{(x,y)}{}'\frac{1}{f_{\mathfrak{b}}(x, y)^s}$$

が得られる．ここで $\sum_{(x,y)}{}'$ は (x, y) が $(0, 0)$ 以外の格子点を動いたときの和である．ところで，２次形式の同値の決め方から $\sum' f_{\mathfrak{b}}(x, y)^{-s}$ は類 C^{-1} からのイデアル $\mathfrak{b}$ のとり方によらないので，これを $\sum' f_{C^{-1}}(x, y)^{-s}$ と書いてよい．たとえば，C_1 を単位類とすればこの類は (0) 以外の単項イデアル全体からなるので，(18) を使うと

$$(29)\quad f_{C_1}(x,y)=\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{1-d}{4}y^2, & d\equiv 1 \bmod 4 \\ x^2-dy^2, & d\equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases}$$

と求められる．

したがって，このように (28) の右辺を書き直したものを (27) に代入して

$$w\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)=\sum_{i=1}^{h}\sum_{(x,y)}{}'\frac{1}{f_{C_i^{-1}}(x,y)^s}$$

を得る．この際，$C_1^{-1}, C_2^{-1}, \cdots, C_h^{-1}$ は全体として，$C_1, C_2, \cdots, C_h$ に一致しているので，この式は

$$(30)\quad w\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)=\sum_{i=1}^{h}\sum_{(x,y)}{}'\frac{1}{f_{C_i}(x,y)^s}$$

とも表わせる．それゆえ，虚2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ のDedekindゼータ関数は，判別式 D を持つ互いに同値でない h 個の正定値2次形式により表現できることがわかった．

さて，(30) を具体例で見よう．まず，$h=1$（すなわちイデアル類が C_1 のみ）の虚2次体に対しては，(29) から

$$w\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})}(s)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{(x,y)}{}'\left(x^2+xy+\frac{1-d}{4}y^2\right)^{-s}, \\ \qquad d=-3,-7,-11,-19,-43,-67,-163 \\ \displaystyle\sum_{(x,y)}{}'(x^2-dy^2)^{-s}, \qquad d=-1,-2 \end{cases}$$

である．次に $h=2$ で $d=-p$（p は $p\equiv 1 \bmod 4$ の素数）の場合は，x^2+py^2 と $2x^2+2xy+\dfrac{p+1}{2}y^2$ が互いに同値でない判別式 $-4p$ の正定値2次形式なので

$$2\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-p})}(s)=\sum_{(x,y)}{}'(x^2+py^2)^{-s}+\sum_{(x,y)}{}'\left(2x^2+2xy+\frac{p+1}{2}y^2\right)^{-s}$$

である．このような d として，$d=-5,-13,-37$ がある．

$h>2$ の例として，$k=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-29})$ を見よう．このときは $h=6$ で高木［2］の巻末の数表4によれば，単位類 C_1 の他にそれぞれ

$$\mathfrak{a}_2 = [3, 1+\sqrt{-29}], \qquad \mathfrak{a}_3 = [3, -1+\sqrt{-29}],$$
$$\mathfrak{a}_4 = [5, 1+\sqrt{-29}], \qquad \mathfrak{a}_5 = [5, -1+\sqrt{-29}],$$
$$\mathfrak{a}_6 = [2, 1+\sqrt{-29}]$$

を含むイデアル類 $C_2, C_3, \cdots, C_6$ がある．ここで $\mathfrak{a} = [\alpha, \beta]$ は α, β が $\mathfrak{a}$ の基底であることを示している．そして，$N\mathfrak{a}_2 = N\mathfrak{a}_3 = 3$, $N\mathfrak{a}_4 = N\mathfrak{a}_5 = 5$, $N\mathfrak{a}_6 = 2$ などから

$$f_{C_2}(x, y) = 3x^2+2xy+10y^2,$$
$$f_{C_3}(x, y) = 3x^2-2xy+10y^2,$$
$$f_{C_4}(x, y) = 5x^2+2xy+6y^2,$$
$$f_{C_5}(x, y) = 5x^2-2xy+6y^2,$$
$$f_{C_6}(x, y) = 2x^2+2xy+15y^2$$

となる．そこで Dedekind ζ 関数は次のように表わされる．

$$\begin{aligned}2\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-29})}(s) = & \sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(x^2+29y^2)^s} \\ & +2\sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(3x^2+2xy+10y^2)^s} \\ & +2\sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(5x^2+2xy+6y^2)^s} \\ & +\sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(2x^2+2xy+15y^2)^s}.\end{aligned}$$

この他，(20) と (30) から素数 p が判別式 D の 2 次形式で表わされるための必要十分条件は，p が $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ で完全分解する ($\chi_D(p) = 1$) か，または完全分岐する ($\chi_D(p) = 0$) ことであることが従う．

ところで，虚 2 次体の Dedekind ゼータ関数が正定値 2 次形式で表わされたのと似たようなことが純 3 次体でも起きている．これを最初に指摘したのは Dedekind であった ([7] 参照)．ここでいう純 3 次体とは 3 乗因子を持たない自然数 m を使って，$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{m})$ とかけている体のことである．この体の判別式 D は，自然数 f により，

$$D = -3f^2$$

と表わされる．そして，判別式 D の正定値原始2次形式を上のように類別したときの類数を h とし，$f_1(x,y), f_2(x,y), \cdots, f_h(x,y)$ をその代表系とすれば，$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{m})$ の Dedekind ゼータ関数は

$$(31)\quad 2\frac{\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{m})}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{i=1}^{h}\lambda_i \sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{f_i(x,y)^s}$$

の形に表わされる．ここで，λ_i は $f_i(x,y)$ によって表わされる素数が m を3乗剰余として持つときは1，そうでないときは $-\dfrac{1}{2}$ で決められる．また，このときの h は次式で求められる．

$$h = \frac{f}{3}\prod_{p|f}\left(1-\frac{\chi_{-3}(p)}{p}\right)$$

具体例として，$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$ を見れば，$D = -3\cdot 6^2$ から $h=3$ である．そして判別式 -108 の原始2次形式の代表系は，x^2+27y^2, $4x^2+2xy+7y^2$, $4x^2-2xy+7y^2$ ととれる．$31 = 2^2+27$ および $4^3 \equiv 2 \pmod{31}$ などから λ は，この順に $1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ となるので，(31) から次式を得る．

$$2\frac{\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(x^2+27y^2)^s} - \sum_{(x,y)}{}' \frac{1}{(4x^2+2xy+7y^2)^s}$$

§3. Epstein ゼータ関数

前節で見たように，虚2次体の Dedekind ゼータ関数は次の形の級数の有限個の和で表わされた．

$$(32)\quad \frac{1}{2}\sum_{(x,y)}{}'(ax^2+bxy+cy^2)^{-s}.$$

たとえば，$k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})$ に対しては

$$\zeta_k(s) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)}{}'(x^2+5y^2)^{-s} + \frac{1}{2}\sum_{(x,y)}{}'(2x^2+2xy+3y^2)^{-s}$$

であった．この右辺の2個の級数の和は，Dedekind ゼータ関数

として，Riemann ゼータ関数の持つ基本的性質を継承している．それでは，このうち $\sum'(x^2+5y^2)^{-s}$ だけをとり出して，その性質を調べたらどうなるだろうか．

実はこの級数も関数等式，近似関数等式，平均値公式などを持つことからわかるように，Riemann ゼータ関数の基本的性質の多くを受け継いでいるのである．しかし，Riemann ゼータ関数のより深い性質を導く拠り所である Euler の無限積展開に相当するものを持っていない．このことは，$\sum'(x^2+5y^2)^{-s}$ に $\zeta(s)$ と何か決定的に異なる現象が起きているのではないかと思わせる．

実際，そのようなことは起きていて，この級数 $\sum'(x^2+5y^2)^{-s}$ は，$\sigma=\dfrac{1}{2}$ 上に無限個の零点を持ちながらも，領域 $\sigma>0$ にある零点がすべては $\sigma=\dfrac{1}{2}$ にのっていない例になっているのである．このような現象は，何も $\sum'(x^2+5y^2)^{-s}$ に特有のものではなく，もっと一般に，(32) の形の級数についても起きている．すなわち，虚 2 次体 k の類数が 1 より大きいとき，判別式 D_k の正定値 2 次形式から作られる (32) の形の級数は，領域 $\sigma>1$ に無数の零点を持つことが知られている．それゆえ，これらの級数に対しては，拡張された Riemann 予想が成立していないことがわかる．

ところで，一般に，拡張された Riemann 予想が成立しないこれらの級数も，前節で見たように 2 次体や 3 次体の Dedekind ゼータ関数を構成する要素になっていた．

そこでこの節では，(32) の形の級数を含め，さらに 2 変数の正定値 2 次形式を一般的にした m 変数の正定値 2 次形式に対する Epstein ゼータ関数というものを見ることにしよう ($m\geqq 2$)．

実対称行列 $[a_{jl}]$ に対して，m 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ についての 2 次形式

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{jl}x_jx_l$$

を考えよう．これからは，$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正定値としておく．

すると，$\det(a_{jl})>0$ なので行列 $[a_{jl}]$ の逆行列が作れ，それを $[a_{jl}{}^*]$ で表わすと，対応する2次形式

$$Q^*(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} a_{jl}{}^* x_j x_l$$

も正定値になる．

$2m$ 個の実数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m, \delta_1, \cdots, \delta_m$ に対して

$$(33)\quad Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q = \sum_{x_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{x_m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi i(x,\delta)}}{Q(x_1+\gamma_1, \cdots, x_m+\gamma_m)^{\frac{s}{2}}}$$

で定義される級数は，領域 $\sigma>m$ で絶対収束している．ただし，$(x_1, \cdots, x_m)$ は m 次元 Euclid 空間の格子点全体を動き，

$$(x, \delta) = \sum_{j=1}^{m} x_j\delta_j$$

とする．もちろん，$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ がすべて整数のときは，$(x_1, \cdots, x_m)$ は $(-\gamma_1, \cdots, -\gamma_m)$ 以外を動くものとする．以下において，$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ がすべて整数であることを $(\gamma_j)\in \boldsymbol{Z}^m$ で表わす．

上の (33) の形の級数は Epstein によって，Kronecker 極限公式の別証明を与えるために導入された (Epstein [9])．それゆえ，これを m 階の Epstein ゼータ関数とよぶ．ところで

$$Z\begin{vmatrix}-\gamma_1 & \cdots & -\gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q = Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m \\ -\delta_1 & \cdots & -\delta_m\end{vmatrix}(s)_Q,$$

$$Z\begin{vmatrix}-\gamma_1 & \cdots & -\gamma_m \\ -\delta_1 & \cdots & -\delta_m\end{vmatrix}(s)_Q = Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q,$$

$$Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_j & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_j+1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q = Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_j & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_j & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q,$$

$$Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_j+1 & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_j & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q = e^{-2\pi i\delta_j} Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_j & \cdots & \gamma_m \\ \delta_1 & \cdots & \delta_j & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q$$

が成り立つので，Epstein ゼータ関数を考えるときは，

$$0\leqq \gamma_j, \delta_j < 1, \qquad j=1, 2, \cdots, m$$

としても構わない.

ここで，Epstein ゼータ関数の例を1つ見よう．たとえば，$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ に対する

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}(s)_Q = \sum_{x_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{x_4=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{\frac{s}{2}}}$$

は4階の Epstein ゼータ関数である．このとき，自然数 n に対して，b_n で $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$ を満たす格子点 (x_1, x_2, x_3, x_4) の個数を表わせば，Jacobi によって

$$b_n = \sum_{d|n} d - \sum_{4d|n} 4d$$

が示されているので，§1の (4) を使うと

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}(2s)_Q = 8(1-2^{2-2s})\,\zeta(s)\,\zeta(s-1)$$

が得られる．

さて，Epstein ゼータ関数も Dirichlet L 関数や Dedekind ゼータ関数のように，ある種の関数等式を満たしている．それを見ることにしよう．この場合も，一般化されたテータ級数

$$(34)\quad \vartheta\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(0, z)_Q = \sum_{x_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{x_m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z Q(x_1+\gamma_1,\cdots,x_m+\gamma_m)+2\pi i(x,\delta)}, \qquad z>0$$

およびその反転公式

$$(35)\quad \vartheta\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(0, z)_Q = \frac{e^{-2\pi i(\gamma,\delta)}}{z^{\frac{m}{2}}\sqrt{\varDelta}}\vartheta\begin{vmatrix}\delta_1 & \cdots & \delta_m\\ -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_m\end{vmatrix}\left(0, \frac{1}{z}\right)_{Q^*}$$

を使うと，Epstein ゼータ関数は

$$(36)\quad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q$$

$$=\frac{e^{-2\pi i(\gamma,\delta)}}{\sqrt{\varDelta}}\int_1^\infty z^{\frac{m-s}{2}-1}\vartheta\begin{vmatrix}\delta_1 & \cdots & \delta_m\\ -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_m\end{vmatrix}(0,z)_{Q^*}dz$$

$$+\int_1^\infty z^{\frac{s}{2}-1}\vartheta\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(0,z)_Q dz$$

と表わされる．ただし，$\varDelta=\det(a_{jl})$ とする．

このとき，$0<\gamma_j, \delta_j<1$ $(1\leqq j\leqq m)$ ならば，(36) の右辺の2個とも s の整関数なので，(36) によって m 階の Epstein ゼータ関数の全平面への解析接続を定めることにしよう．すると，Epstein ゼータ関数は整関数になる．そして

$$(37)\quad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q$$

$$=\frac{e^{-2\pi i(\gamma,\delta)}}{\sqrt{\varDelta}}\pi^{-\frac{m-s}{2}}\Gamma\left(\frac{m-s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}\delta_1 & \cdots & \delta_m\\ -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_m\end{vmatrix}(m-s)_{Q^*}$$

という関数等式を満たしている．これは一見すると対称性に欠ける等式のようだが，置き換え

$$(s, \gamma_j, \delta_j, a_{jl}) \longrightarrow (m-s, \delta_j, -\gamma_j, a_{jl}{}^*)$$

に関して

$$\sqrt[4]{\varDelta}e^{\pi i(\gamma,\delta)}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}\gamma_1 & \cdots & \gamma_m\\ \delta_1 & \cdots & \delta_m\end{vmatrix}(s)_Q$$

が不変であるという意味での対称性を持っている．

$(\gamma_j), (\delta_j)\notin \boldsymbol{Z}^m$ の場合の解析接続は，これで片づいたが，その他の場合にも適当に (36) の右辺を変えて，全平面へ解析接続することにする．たとえば，$(\gamma_j), (\delta_j)\in\boldsymbol{Z}^m$ の場合には，$\gamma_j=\delta_j=0$ $(1\leqq j\leqq m)$ として，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}(s)_Q$$

$$=-\frac{2}{s}-\frac{2}{\sqrt{\varDelta}(m-s)}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int_1^{\infty} z^{\frac{m-s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}(0,z)_{Q^*}-1\right)dz$$

$$+\int_1^{\infty} z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}(0,z)_{Q}-1\right)dz$$

によって解析接続をする．この場合の Epstein ゼータ関数

$$Z\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}(s)_Q = \sum_{x_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{x_m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{Q(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\frac{s}{2}}}$$

は $s=m$ でのみ1位の極を持ち，それ以外では正則である．

これらのことから，m 階の Epstein ゼータ関数は，$(\delta_j)\notin \boldsymbol{Z}^m$ のとき，整関数であり，$(\delta_j)\in \boldsymbol{Z}^m$ のとき $s=m$ を除いて正則であることがわかる．そのとき，$s=m$ は1位の極でその留数は $2\pi^{\frac{m}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{-1}$ である．もちろん，$(\gamma_j)\in \boldsymbol{Z}^m$ または $(\delta_j)\in \boldsymbol{Z}^m$ の場合も関数等式 (37) が成立している．それゆえ，(37) から生ずる Epstein ゼータ関数の自明な零点は，$s=-2, -4, \cdots, -2n, \cdots$ でさらに $(\gamma_j)\notin \boldsymbol{Z}^m$ の場合に限って，これらに，$s=0$ をつけ加えたものである．ただし次のような特異な Epstein ゼータ関数もあることに注意しておく．それはすべての正定値2次形式 $Q(x_1, x_2)$ に対して

$$Z\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}(s)_Q \equiv 0$$

となっている．

以上では，$m\geqq 2$ としてきたが，$m=1$ のときも，特に $Q(x)=x^2$ として，1階の Epstein ゼータ関数を

$$Z\begin{vmatrix}\gamma\\ \delta\end{vmatrix}(s) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi ix\delta}}{(x+\gamma)^s}$$

で定義すれば，上に見た解析接続や関数等式において $m=1$ としたものが，そのまま成立している．

ところで，前節でも見たように，2階の Epstein ゼータ関数は2

次および3次の代数体と接触を持っていて，たいへん興味深い．しかし $m>2$ のとき，m 階の Epstein ゼータ関数は，その形からそれほど代数体に結びつかないように見える．ところが，m 階の Epstein ゼータ関数も次のような形で代数体と関連しているのである（Hecke [11]）．

k を m 次代数体とし，r_1, r_2, R, w は§2で決めたものとする．$r = r_1+r_2-1$ とし，k の基本単数系 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ をとっておく．$\mathfrak{b}$ を k の整イデアルとし，その基底 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ に対して，正定値2次形式 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{l=1}^{m} x_l \beta_l^{(j)}\right|^2 e^{\sum_{u=1}^{r} z_u \log|\varepsilon_u^{(j)}|^2}$$

で決める（$z_1, z_2, \cdots, z_r$ は実数）．このとき，次式が成立している．

$$(38) \quad w\frac{2^{-r_2 s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}}{2^{r_1-1}mR\Gamma\left(\frac{ms}{2}\right)}\sum_{\substack{(\mu) \\ \mu\in\mathfrak{b}}}\frac{1}{|N(\mu)|^s}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Z\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}(ms)_Q\, dz_1\cdots dz_r$$

ただし，この左辺の和は $\mathfrak{b}$ の数 $\mu \neq 0$ から作られる単項イデアルのうち相異なるもの全体についてとられる．(38) は k の部分的な Dedekind ゼータ関数が m 階のある Epstein ゼータ関数と密接な関係を持つことを示している．しかし，k が有理数体かあるいは虚2次体の場合には，$r=0$ となり，(38) は自明な式になる．

さて，上にも言ったように2階の Epstein ゼータ関数は特に興味深いので，もう少しそれについて調べてみよう．ここでは，(32) の形のものに限っておこう．

$$Q(x, y) = ax^2+bxy+cy^2$$

は正定値だが，必ずしも整係数と限らないものとしよう（$a>0$ とする）．このとき，単に

$$\zeta(s, Q) = \frac{1}{2} Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} (2s)_Q = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)}{}' Q(x, y)^{-s}$$

と置く．すると，

$$Q^*(x, y) = \frac{1}{\varDelta}(cx^2 - bxy + ay^2), \qquad 4\varDelta = 4ac - b^2$$

なので，

$$\zeta(s, Q^*) = \varDelta^s \zeta(s, Q)$$

となる．よって (37) から明白な対称性を持つ関数等式

$$(39) \quad \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta(s, Q) = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \zeta(1-s, Q)$$

が従う．ただし，$D = -4\varDelta$ である．

この式は，虚 2 次体の Dedekind ゼータ関数の関数等式 (§ 2 の (21) で $a = 1$ としたもの) が，各イデアル類に対する部分的な Dedekind ゼータ関数のレベルですでに成立していることを示す．

また，$N(T, Q)$ により，領域 $-1 < \sigma < 2$，$0 < t < T$ における $\zeta(s, Q)$ の零点の個数を表わせば，§ 2 の (22) と同じ評価式が成立している．そして $\sigma = \frac{1}{2}$ 上に無数の零点を $\zeta(s, Q)$ は持っている．

さらに $\sqrt{\varDelta} > 7.0556\, a$ ならば，$\zeta(s, Q)$ は $\frac{1}{2}$ と 1 の間の実軸上に零点を持っていることも示されている．そこで (39) から 0 と $\frac{1}{2}$ の間にも $\zeta(s, Q)$ の零点があることになる．このことも，$\zeta(s)$ と非常に異なる点である．

さて，これまで見てきた Epstein ゼータ関数同様，Riemann ゼータ関数と異なる種々の奇妙な現象を起こす関数として Hurwitz ゼータ関数がある．それは，$0 < \alpha \leqq 1$ を満たす α に対して

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \qquad \sigma > 1$$

で定められる級数である．特に $\alpha = 1$ および $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s), \qquad \zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s)$$

である．Hurwitz ゼータ関数は $\sigma>1$ で収束して，正則関数になる．また，$\zeta(s, \alpha)$ は $\zeta(s)$ と同じようにして全平面に解析接続されて，$s=1$ のとき1位の極（留数は1）を持つ以外，全平面で正則である．$\alpha \neq 1, \frac{1}{2}$ のとき一般に $\zeta(s, \alpha)$ は Euler の無限積表示を持たないし，かつ任意の $\delta>0$ に対し，帯領域 $1<\sigma<1+\delta$ に少なくとも1個の零点を持つ．そこで Hurwitz ゼータ関数（$\alpha \neq 1, \frac{1}{2}$）も $\sigma>1$ の領域に無数の零点を持つことがわかる．

以上でこの章の話は終わる．歴史的に見ても，本来ならこの後 Hecke の L 関数と Artin の L 関数の話をするべきであるが，種々の事情でできなかった．興味のある読者は末綱［4］，Heilbronn［13］, Martinet［15］などを読んでいただきたい．

●文献

［1］ 高木貞治『代数的整数論』（岩波書店）

［2］ 高木貞治『初等整数論講義』（共立出版）

［3］ 高木貞治『近世数学史談』（共立出版）

［4］ 末綱恕一『解析的整数論』（岩波書店）

［5］ ボレビッチ-シャハレビッチ『整数論』（上），（下）（吉岡書店）

［6］ Ayoub, R.: Euler and the zeta function, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 1067-1086.

［7］ Dedekind, R.: Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. 121 (1900), 40-123 (Mathematische Werke Bd. 2, 148-235, Chelsea, 1969).

［8］ Dirichlet, P. G. L.: Mathematische Werke Bd. 2, 311-344, Chelsea, 1969.

［9］ Epstein, P.: Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I, Math. Ann. 56 (1903), 615-644.

［10］ Fricke, R.: Lehrbuch der Algebra Bd. 2, Braunschweig, 1928.

［11］ Hecke, E.: Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher

Körper, Mathematische Werke, 198-207, Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.

[12] Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Chelsea, 1970.

[13] Heilbronn, H.: Zeta-functions and L-functions, in [Cassels and Fröhlich] Algebraic Number Theory, Chap. VIII, Academic Press, 1967.

[14] Landau, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Chelsea, 1949.

[15] Martinet, J.: Character theory and Artin L function, in [Fröhlich] Algebraic Number Fields, 1-87, Academic Press, 1977.

[16] Titchmarsh, E. C.: The Theory of the Riemann Zeta-function (second edition revised by Heath-Brown D. R.), Clarendon Press•Oxford, 1986.

[第 6 章担当／吉野健一]

●第7章

Weil–Deligne の定理

Dedekind ゼータ関数が Riemann ゼータ関数を代数体に拡張した形で与えられたのと同様に，有限体上の代数関数体について考えたゼータ関数が合同ゼータ関数である．

この合同ゼータ関数は，最初，代数幾何学において多変数の方程式の有理数解の個数を調べるために考えだされたものであるが，その与え方からも想像できるように，Riemann ゼータ関数とよく似た性質を持っているだろうと考えられた．すなわち，ある種の関数等式を満たし，零点や極も何か条件を満たすだろうと考えられたのである．これが Weil 予想［10］とよばれていたものであり，1973年，P. Deligne［7］により完全に証明されたのである．

本題に入る前に，代数幾何学（algebraic geometory, 直訳すれば代数的幾何学）について簡単に解説しておこう．高校の数学の中にも「代数幾何」(algebra and geometory) というものがあるが，これとは多少ニュアンスが違いがある．代数幾何学とは，代数方程式の零点といった代数的に与えられる対象の幾何学的な性質について調べるものである．

たとえば，2 つの変数 x, y についての 2 次方程式

$$f(x, y) = ax^2+hxy+by^2+cx+dy+e = 0$$

を考えると，これは

1. 2 本の直線
2. 楕円（円も含む）
3. 放物線
4. 双曲線

の 4 種類に分類することができる．このうち 1. は、$f(x, y)$ が 2 つの 1 次式の積となっているので除外して，$f(x, y)$ が既約となる 2. から 4. についてもう少し調べてみよう．3 次元空間の $z=1$ という平面で $f(x, y)=0$ の零点を考えて，これを球面 x^2+y^2

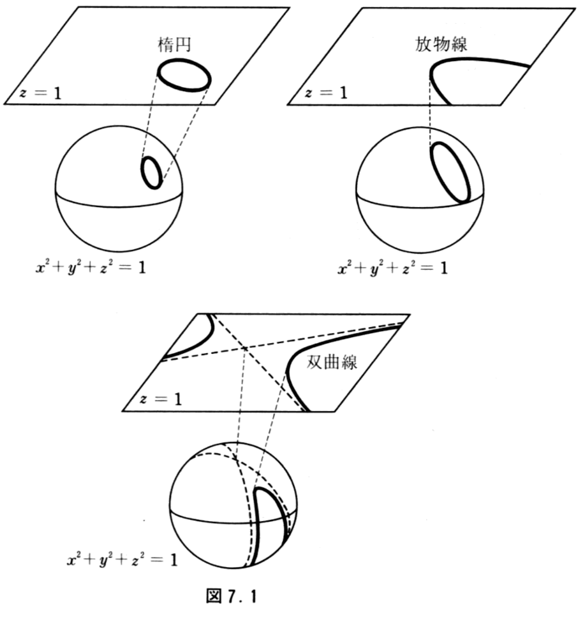


図 7.1

$+z^2=1$ に射影すると図 7.1 のようになる．

球面の原点に関して対象な点を同一視したもの（射影空間という）で考えると，双曲線も 1 つの楕円となり，いずれも楕円の位置を少しずらしただけで本質的にはすべて同じものであることがわかる．これらは有理曲線とよばれる最も基本的なもので，その構造としては直線を射影空間で考えたものと一致する．

同様に，複素数上の既約な 3 次曲線を複素射影空間で考えると，特異点を持つ場合には有理曲線の構造を持つことがわかるが，特異点を持たない場合は有理曲線とはまったく異なった構造をとる．これが楕円曲線と呼ばれるものである（楕円とは違うものである）．x の 3 次または 4 次の多項式 $g(x)$ について x と $\sqrt{g(x)}$ からなる有理式 $R(x, \sqrt{g(x)})$ の積分は

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz,$$

$$\int\frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

という 3 つの楕円積分のいずれかに変形することができるが，初等関数を用いて表わすことはできないことが知られている．楕円の弧の長さを計算するときに現われる積分がこの種の積分であることからこのような名前が付けられたのである．この楕円積分の逆関数として楕円関数が定義できるが，この楕円関数が実は楕円曲線上の関数となっているのである．

このように，代数幾何学は，射影空間上のいくつかの方程式の零点として定まる射影代数多様体とその上で定義される関数について統一的に調べることが大きな目標である．

この章では最初に触れたように，複素数体上ではなく，有限体上の射影代数多様体に対して定まる合同ゼータ関数について，代

数幾何学上の大きな問題であったWeil予想とDeligneが証明するまでの経過について紹介する.

§1. Weilの結果

代数体のDedekind ζ関数の定義と同様に，元の個数が q である有限体 $k = k_q$ 上の代数関数体 K に対してもゼータ関数を

$$\zeta_{K/k}(s) = \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義することができる．ただし，$\sum$ は K/k の整因子 $\mathfrak{a}$ をすべて動かしたものであり，ノルムは

$$N(a) = q^{\deg \mathfrak{a}}$$

とする．これは K/k の合同ゼータ関数とよばれてるものであるが，さらにこれを $u = q^{-s}$ という変数変換により u の関数と見なし $Z(u, K/k)$ と表わすと，

$$Z(u, K/k) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m u^{m-1}$$

（ν_m は k の m 次拡大体 k_{q^m} 上の有理点の個数）

とベキ級数で表わすことができるため，この方が $\zeta_{K/k}$ に較べて扱いやすいものとなる．E. Artinは K が楕円関数体のときに

$$\text{(1)} \quad Z(u, K/k) = \frac{1-au+qu^2}{(1-u)(1-qu)}, \qquad |a| \leqq 2\sqrt{q}$$

となることを示した．本来のRiemann予想では，自明でない零点は複素平面上の

$$s = \frac{1}{2} + t\,i$$

という直線上に存在すると予想されているが，これを u の式に変換すると

$$u = q^{-\left(\frac{1}{2}+ti\right)}$$
$$= q^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-(t \log q)i}$$

となり

$$\text{(2)} \quad |u| = q^{-\frac{1}{2}}$$

と表わせる．式(1)の零点は分子

$$1-au+qu^2=0, \qquad |a|\leqq 2\sqrt{q}$$

の根であり，aについての条件は判別式

$$D=a^2-4q\leqq 0$$

であることを示している．したがって，根は

$$u=\frac{1}{2q}(a\pm\sqrt{4q-a^2}\,i)$$

となり，その絶対値は

$$|u|=\frac{1}{2q}\sqrt{a^2+(4q-a^2)}$$
$$=q^{-\frac{1}{2}}$$

となるので (2) を満たしていることがわかる．これはRiemann予想に類似したもののうち，実際に解けた数少ないものの1つである．

A. Weil [10] はArtinの結果を一般化して，任意の代数関数体の場合について，すなわち任意の種数gの非特異代数曲線Cに対する合同ゼータ関数$Z(u,C)$について次のような結果を導いた．

定理　有限体k_g上の種数gの非特異代数曲線Cに対する$Z(u,C)$について

1. $Z(u,C)$は有理関数となる．
2. $Z(u,C)$は関数等式

$$Z\left(\frac{1}{qu},C\right)=q^{1-g}u^{2-2g}Z(u,C)$$

を満たす．

3. $Z(u,C)=\dfrac{P(u)}{(1-u)(1-qu)}$

と表わせる．ただし，$P(u)$はuの$2g$次の多項式．

4. $P(u)=\prod(1-\omega_i u)$

とすると$|\omega_i|=q^{-\frac{1}{2}}$.

さらに，Weil はこれと同様のことが非特異射影代数多様体についても成立すると予想した．この予想がいわゆる Riemann-Weil 予想とよばれるものであり，これを解くために今世紀の数学が大きく発展したと言っても過言ではない．

§ 2. 有限体上の代数幾何学

有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ を考えると，そこでは普通の和や積が定まっていて，0 以外の数 x に対して $\dfrac{1}{x}$ もまた有理数すなわち $\boldsymbol{Q}$ の元となる．このように和と積が与えられた集合で

1° 和に関して可換群をなし，

2° 0 以外の数全体も積に関して可換群をなす

ものを体とよぶ．$\boldsymbol{Q}$ はもちろん体であり，特に有理数体とよばれている．これ以外にもいろいろな体があるが，ここでは元の数が有限な体（有限体）を扱う．

もっとも基本的な有限体として，素体とよばれるものがある．これは，素数 p に対して 0 から $p-1$ までの数の集合 k において 2 つの数 x, y の和と積をそれぞれ

$$x+y \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$x\cdot y \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

としたものである．有限体はこれ以外に，元の数が素数のベキ q（$=p^m$）となる k_q がある．この k_q は素体 k_p 上の方程式

(3) $x^q-x=0$

の形式的な根全体からなる集合と表わすことができる．もちろん k_q の元 a は Fermat の小定理

$$a^p=a \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

となることを用いると

$$a^q=(\cdots(a^p)^p\cdots)^p=a$$

となり（3）を満たしているので k の元となる．よって

$$k_p \subset k_q$$

となるが，k_q は (3) の根 α をうまく選ぶと k と α を含む最小の体 $k(\alpha)$ に一致する．さらに，この α を用いれば k_q は k_p 上 $1, \alpha, \cdots, \alpha^{m-1}$ で張られるベクトル空間

$$k_q = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{m-1}\alpha^{m-1} \mid a_i \in k_p\}$$

と表わすこともできる．

さて，k を任意の体（有限体とは限らない）とし，V を k 上の $n+1$ 次元のベクトル空間とする．$V\backslash\{0\}$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}, \qquad c \in k\backslash\{0\}$$

となるとき，すなわち $\boldsymbol{a} = (a_0, \cdots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_0, \cdots, b_n)$ とすれば

$$a_i = cb_i, \qquad 0 \leqq i \leqq n$$

となるとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を同値として $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ で表わすと～は同値関係となる．$V\backslash\{0\}$ のこの同値関係による商集合を $\boldsymbol{P}^n$ で表わし n 次元射影空間という．この 1 つの同値類はあるベクトルのスカラー倍となるベクトル全体になっていて，ちょうど原点を通る直線から原点を除いた集合となる．したがって，同値類と直線を対応

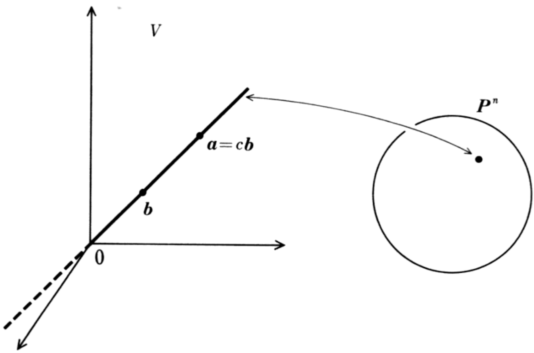


図 7.2

させることにより $\boldsymbol{P}^n$ は原点を通る直線の集合とみなすこともできる．

この n 次元射影空間をもう少し詳しく調べてみよう．$V\backslash\{0\}$ のベクトル $\boldsymbol{a}=(a_0, \cdots, a_n)$ について $a_0 \neq 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ と同値なベクトル $\boldsymbol{b}=(b_0, \cdots, b_n)$ についても $b_0 \neq 0$ となるのでこの同値類に対し

$$\left(\frac{a_1}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}\right)$$

という n 次元ベクトルを対応させる．これは同値類に対応する直線と平面 $\{x_0=1\}$ との交点をとり，座標の最初の成分を除いたベクトルになっている．この対応は1対1対応であるから $\boldsymbol{P}^n$ は n 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}^n$（ベクトル空間を点集合とみなしたもの）を含んでいることがわかる．

また，V において $a_0=0$ となるベクトル全体は n 次元ベクトル空間となるので，同値関係で割れば $\boldsymbol{P}^{n-1}$ とみなせるので

$$\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{A}^n \cup \boldsymbol{P}^{n-1}$$

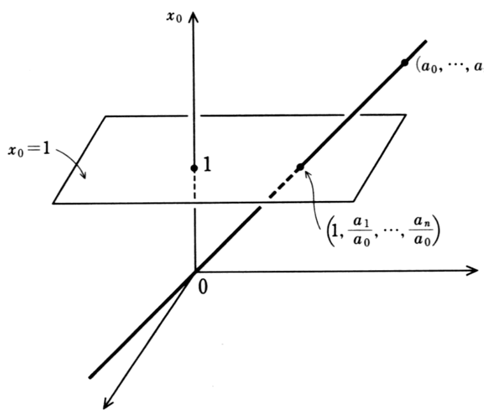


図7.3

と表わすことができる．図7.3からもわかるように，$\boldsymbol{P}^{n-1}$はアフィン空間の無限遠点の集合になっておりこれを特に無限遠集合という．

$n+1$個の変数からなるk上の多項式環$k[X_0, \cdots, X_n]$のd次の同次式$f(X_0, \cdots, X_n)$（各項の次数が等しい多項式）をとると同次であることから

$$f(cX_0, \cdots, cX_n) = c^d f(X_0, \cdots, X_n), \qquad c \in k$$

となる．したがって方程式

(2)　$f(X_0, \cdots, X_n) = 0$

を考えると，$(a_0, \cdots, a_n)$が(2)の解ならば$(ca_0, \cdots, ca_n)$もまた(2)の解になるので，この方程式は射影空間$\boldsymbol{P}^n$上で定義された方程式と考えることができ，(2)の解からなる$\boldsymbol{P}^n$の部分集合を$\boldsymbol{P}^n$の超曲面とよび$\{f=0\}$と表わすことにする．2つの超曲面$\{f_1=0\}, \{f_2=0\}$に対しては

(3)　$\{f_1=0\} \cup \{f_2=0\} = \{f_1 \cdot f_2 = 0\}$

という関係が成立する．r個の同次式$f_1(X_0, \cdots, X_n), \cdots, f_r(X_0, \cdots, X_n)$についても

$$(4) \quad \begin{cases} f_1(X_0, \cdots, X_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_r(X_0, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$$

は$\boldsymbol{P}^n$における連立方程式となり，解の集合$\{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$は

$$\{f_1 = \cdots = f_r = 0\} = \{f_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{f_r = 0\}$$

という超曲面の共通部分として表わせる．このような集合を代数的集合という（空集合や$\boldsymbol{P}^n$自身も代数的集合である）．逆に，代数的集合Vに対してVの各点で0となる$k[X_0, \cdots, X_n]$の多項式全体はイデアルをなす．これを$I(V)$と表わしVの定義イデアルという．(4)で与えられる代数的集合の定義イデアルは$f_1, \cdots, f_r$を含むが，これらで生成されているとは限らない．

射影空間は体 k 上で与えられていたので，$k = \boldsymbol{R}$ または $k = \boldsymbol{C}$ とすればベクトル空間 V に自然な Euclid 位相が入るので，射影空間にもこれから導かれる位相を入れることができる．実は，任意の体 k 上の射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ に対してもちょっと変わった位相を入れることができる．これは，代数的集合の任意個の共通部分と有限個の和集合からなる集合を F とすれば F は

$$\phi \in F, \qquad \boldsymbol{P}^n \in F,$$
$$V_1, V_2 \in F \quad \text{ならば} \quad V_1 \cup V_2 \in F$$
$$V_i \in F \ (i \in I) \quad \text{ならば} \quad \bigcap_{i \in I} V \in F$$

という閉集合系の公理を満たすので，これにより入れた位相であり，これを Zariski 位相という．この位相が「ちょっと変わっている」点は，k が無限体のときには Hausdorff 空間になっていないというところである．

位相の入れ方からわかるとおり空でない開集合は代数的集合の補集合であるから，ほとんどすべての点を含み，2 つの開集合は必ず共通部分を持つことになる．一方，k が有限体ならば，$\boldsymbol{P}^n$ は点集合として有限となり，各点 x に対し $\{x\}$ は閉集合であり

$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} (\boldsymbol{P}^n \backslash \{y\})$$

のように有限個の開集合の共通部分にもなるので $\{x\}$ は開集合にもなる．したがって，この場合は Zariski 位相は離散的な位相となる．

さて，$\boldsymbol{P}^n$ の代数的集合 V が

$$V = V_1 \cup V_2 \quad (V_1, V_2 \text{は代数的集合})$$
$$\text{ならば } V_1 = V \text{ または } V_2 = V$$

となるとき V は既約であるという．V が超曲面 $\{f = 0\}$ のときは，f が既約多項式ならば V は既約となるが，逆は成立しない．実際，$\{f^m = 0\}$ は $\{f = 0\}$ と一致するし，k が代数閉体でなければ，解を持たないような方程式が存在するのでこれを $g = 0$ とす

れば，$\{f\cdot g=0\}$ も $\{f=0\}$ と一致するからである．射影空間の既約な代数的集合のことを射影代数多様体とよぶ（以後，すべて射影代数多様体についての話であるから，単に代数多様体とよぶことにする）．

代数多様体 X において，X の点 x における局所環が正則局所環のとき，すなわち，x における極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とするとき $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ のベクトル空間としての次元が X の次元と一致するとき，X は x で非特異であるといい，すべての点で非特異であるとき X を非特異代数多様体とよぶ．

例 3.1　$X^3-Y^2Z=0$ で定まる代数的集合 V は既約となるので代数多様体となる．これを $Z\neq 0$ となるところで見ると

$$x=X/Z,\qquad y=Y/Z$$

と置くことにより

$$y^2=x^3$$

となる．

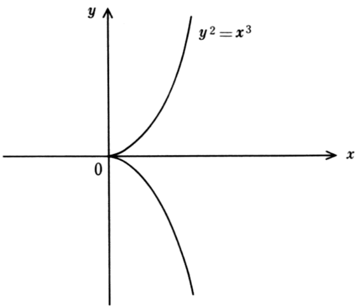


図 7.4

この xy 平面における原点は V の特異点となっており，それ以外の点ではすべて非特異となっている．

§3. 代数多様体の合同ゼータ関数 $Z(u, X)$

有限体 k_q 上の代数関数体 K のゼータ関数 $\zeta_{K/k}(s)$ に対して $u = q^{-s}$ と変換した $Z(u, K/k)$ は，ν_m を K に対応する代数曲線の k_{q^m} 有理点の個数とすると

$$Z(u, K/k) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{m} u^m\right)$$

と表わせる．これと同様に，体 k_q 上で定義された一般の非特異射影代数多様体 X に対しても ν_m を X の k_{q^m} 上の有理点の個数として

$$Z(u, X) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{m} u^m\right)$$

により合同ゼータ関数 $Z(u, X)$ を定義する．これは

$$Z(u, X) = \exp\left(\int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \nu_m u^{m-1}\right) du\right)$$

と表わすこともできる（実際の計算には後者の表現を用いる）．

例 3.2 k_q 上の射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ については，k_{q^m} 上の有理点は k_{q^m} 上の射影空間の点とみなせる．射影空間はその定義から $((k_{q^m})^{n+1}\{0\})/\sim$ であり，1つの同値類は q^m-1 個の点からなるので

$$\nu_m = \frac{(q^m)^{n+1}-1}{q^m-1} = \sum_{l=0}^{n} (q^m)^l$$

となる．したがって

$$\sum_{m=1}^{\infty} \nu_m u^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} (q^m)^l\right) u^{m-1} = \sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^{lm} u^{m-1}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{q^l}{1-q^l u}$$

となり，

$$\int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \nu_m u^{m-1}\right) du = -\sum_{l=0}^{n} \log(1-q^l u)$$

であるから

$$Z(u, \boldsymbol{P}^n) = \prod_{l=0}^{n} \frac{1}{1-q^l u}$$

となる．

例 3.3　$\boldsymbol{P}^2$ において $xy-z^2=0$ で定まる代数曲線 C に対する $Z(u, C)$ を考える．まず，有理点の個数 ν_m を求めよう．体 $k=k_{q^m}$ 上の $\boldsymbol{A}^3\backslash\{(0, 0, 0)\}$ において，$y\neq 0$ とすると，

$$x=\frac{z^2}{y}$$

と表わせる．体の上で考えているので，このような x が1つだけ存在する．したがって，有理点の個数は y $(\neq 0)$ と z が動けるので

$$(q^m-1)q^m$$

となる．次に $y=0$ とすると，$z\neq 0$ となるので，$x\neq 0$ となる点の個数は

$$q^m-1$$

である．したがって，$\boldsymbol{P}^2$ の有理点としての個数は

$$\frac{(q^m-1)q^m+(q^m-1)}{q^m-1}=q^m+1$$

となり，このことから

$$\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m u^{m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}(q^m+1)u^{m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}q^m u^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}u^{m-1}$$
$$=\frac{1}{1-qu}+\frac{1}{1-q}.$$

したがって

$$Z(u, C)=\exp\left(\int_0^u\left(\frac{1}{1-qu}+\frac{1}{1-q}\right)du\right)$$
$$=\frac{1}{(1-u)(1-qu)}$$

となる．$Z(u, C)$ は射影空間 $\boldsymbol{P}^1$ の $Z(u, \boldsymbol{P}^1)$ と一致しているが，これは C が有理曲線となっているからである．

§4. Riemann-Weil 予想と Deligne による証明 (Weil-Deligne の定理)

前節で与えた合同ゼータ関数 $Z(u, x)$ について，Weil は 1949 年に次のような予想を与えた [10].

Weil 予想 有限体 k 上 n 次元の非特異射影代数多様体 X に対する合同ゼータ関数 $Z(u, X)$ について

1. $Z(u, X)$ は有理関数となる.
2. $Z(u, X)$ は次の関数等式

$$Z\left(\frac{1}{q^n u}, X\right) = \pm q^{nE/2} u^E Z(u, X)$$

を満たす(E は $X\times X$ における対角多様体 $\varDelta_X$ の自己交点数).

3. $$Z(u, X) = \frac{P_1(u)P_3(u)\cdots P_{2n-1}(u)}{P_2(u)P_4(u)\cdots P_{2n}(u)}$$

と表わせる．ここで，$P_i(u)$ は u の多項式で

$$P_0(u) = 1-u,$$

$$P_{2n}(u) = 1-q^n u,$$

$$P_i(u) = \prod_j (1-\alpha_{ij}u), \qquad 1\leqq i\leqq 2n-1$$

であり，$|\alpha_{ij}| = q^{\frac{i}{2}}$ となる.

4. 3. において，

$$\deg P_i(u) = B_i(X)$$

となる．X が整数環 $\boldsymbol{Z}$ 上で定義された多様体 $\bar{X}$ から導かれるとき，$B_i(X)$ は $\bar{X}_{\boldsymbol{C}} = \bar{X}\underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes}\boldsymbol{C}$ を $2n$ 次の実解析多様体とみなしたときの i 次の Betti 数

$$B_i(X) = \operatorname{rank} H^i(\bar{X}_{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{Z}).$$

さらに，

$$E = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i B_i(X)$$

と表わせる.

この予想を種数 g の代数曲線（すなわち $n=1$）の場合について考えると，

$$B_0(X)=1,$$
$$B_1(X)=2g,$$
$$B_2(X)=1$$

となるので

$$E=2-2g$$

となり，Weil の証明した定理が得られるので，その定理の拡張になっていることがわかる．

さて，この予想の証明であるが，1. と 2. は1960年に B. Dwork [8] により p 進解析の手法を用いて証明され，4. は A. Grothendieck を中心とする数学者のグループ（[1]，[3]，[4]）により，エタール・コホモロジーという概念を導入して証明された．したがって，3. の $P_i(u)$ の根の絶対値が $q^{-\frac{i}{2}}$ となることが証明できれば，Weil 予想が完全に証明されたことになる．この 3. の予想は特に Riemann-Weil 予想とよばれ，1973年に P. Deligne [7] によって証明されるまで非常に難解な予想とされていた．もちろん，それまでに Riemann-Weil 予想の証明は試みられており，Weil は彼自身 Abel 多様体について証明し [10]，E. Bombieli [2] は $\boldsymbol{P}^4$ の3次の超曲面について証明を与えた．また，Deligne も最終的な証明が完成する直前に $K3$ 曲面などの場合について証明していたのである [5]．

Deligne の証明は難しいのでここでの解説は省略し，他の部分の証明の概略について触れておこう．

有限体 $k=k_q$ の代数的閉包を $\bar{k}$ と表わし，k 上の射影多様体 X に対し

$$\bar{X}=X\bigotimes_k\bar{k}$$

とする．$\bar{X}$ の点 x に対してその同次座標の各成分を q 乗した点

$x^{(q)}$ を対応させる射 (morphism) f を Frobenius 射という．この f を m 回合成した

$$f^m \ : \ \bar{X} \longrightarrow \bar{X}$$

について，その不動点の個数が ν_m と一致する．また，f^m によって導かれる l-進コホモロジー $H^i(X, \boldsymbol{Q}_l)$ の自己同型を $f^{m*}{}_{(i)}$ とすると X が非特異ならば

$$\nu_m = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \mathrm{tr}(f^{m*}{}_{(i)})$$

と表わすことができる (Lefschetz の不動点定理)．したがって

$$Z(u, X) = \prod_{i=0}^{2n}\left(\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{tr}(f^{m*}{}_{(i)})\frac{u^m}{m}\right)\right)^{(-1)^i}$$

となり，さらに

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{tr}(f^{m*}{}_{(i)})\frac{u^m}{m}\right) = \det(1-f^*{}_{(i)}u)$$

と表わせるので，予想の 3. における $P_i(u)$ は

$$P_i(u) = \det(1-f^*{}_{(i)}u)$$

となる．また l-進コホモロジーの Poincaré 双対定理を用いることにより，関数等式も導くことができる．

§ 5. Weil-Deligne の定理の応用

Weil-Deligne の定理の応用としては，保形関数についての Ramanujan 予想の証明や，l-進コホモロジーに関する Lefschetz の強定理の証明などもあるが，もともと代数多様体の有理点に関する定理であるから，方程式の整数解の個数を調べるといった解析数論への応用が考えられる．実際，数論的関数の和の残余項としてしばしば現われる Kloostermann 和についての応用は，残余項に対する非常によい評価を与えている．

$(a, m) = (b, m) = 1$ となる整数 a, b, m に対し

$$S(a, b\,; m) = \sum_{\substack{i \leqq x \leqq m-1 \\ (x,m)=1}} \exp\frac{2\pi i}{m(ax+bx^*)}$$

(x^* は $x^*\cdot x = 1 \pmod{m}$ となる整数を表わす)

を Kloostermann 和という．m の素因数分解が

$$m = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\nu_j}$$

と与えられると

$$(Z/m)^\times = (Z/p_1^{\nu_1})^\times \times \cdots\cdots \times (Z/p_r^{\nu_r})^\times$$

と表わせるので

$$S(a, b\,; m) = \prod_{j=1}^{r} S(a, b\,; p_j^{\nu_j})$$

となる．ここで $\nu \geqq 2$ ならば，ある定数 c が存在して

$$|S(a, b\,; p^\nu)| \leqq cp^{\frac{\nu}{2}}$$

となることは容易に示せる．Kloostermann は

$$|S(a, b\,; p^\nu)| \leqq cp^{\frac{3}{4}}$$

であることを示したが，Weil の結果を用いると

$$|S(a, b\,; p^\nu)| \leqq cp^{\frac{1}{2}}$$

となることがわかる．

$q = p^\nu$ として，有限体 k_q 上の Kloostermann 和を $a, b, k_q^\times$ に対して

$$S(a, b\,; q) = \sum_{\substack{xy=1 \\ x,y \in k_q^\times}} \exp\frac{2\pi i}{q(ax+by)}$$

によって定義し，L 関数を

$$L(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} S(a, b\,; q^n)\frac{t^n}{n}\right)$$

とすると，Weil の結果から

$$L(t) = \frac{1-\beta t}{1-\alpha t}, \qquad |\alpha| = |\beta| = q^{\frac{1}{2}}$$

となることがわかる．したがって，

$$\log L(t) = \log(1-\beta t) - \log(1-\alpha t).$$

ベキ級数に展開すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(a, b\,; q^n)}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} t^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{n} t^n$$

となる．両辺の t における係数を比較することにより，

$$|S(a, b\,;q)| = |\alpha-\beta| \leqq 2q^{\frac{1}{2}}$$

が得られる．

さらに，一般化された Kloostermann 和

$$S(a_0, \cdots, a_n\,; q)$$
$$= \sum_{\substack{x_0 \cdots x_n = 1 \\ x_0, \cdots, x_n \in k_q^\times}} \exp \frac{2\pi i}{q(a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n)}$$

についても，Deligne-Weil の定理を用いることにより，

$$|S(a_0, \cdots, a_n\,; q)| \leqq (n+1)q^{\frac{n}{2}}$$

となることが示せる．

●文献

［1］ Artin, M., Grothendieck, A., Verdier, J. L. : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lec. Notes in Math. 269, 270, 305 (1972-73), Springer.

［2］ Bombieri, E., Swinnerton, H. P. F., Dyer, : On the local zeta function of a cubic threefolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 21 (1967), 1-29.

［3］ Grothendieck, A. : Formule de Lefschetz et rationalité des fonction L, Sém. Bourbaki 379 (1964/65).

［4］ Grothendieck, A.: Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA 5), Lec. Notes in Math. 589 (1977), Springer.

［5］ Deligne, P. : La conjecture de Weil pour les surfaces K 3, Inv. Math., 75 (1972), 206-226.

［6］ Deligne, P. : Forms modulaires et représentations l-adiques, Sém. Bourbaki 355, Lec. Notes in Math. 349 (1973), Springer.

［7］ Deligne, P. : La conjecture de Weil, I, II, Publ. I. H. E. S. 43 (1974), 273-307 ; 52 (1980), 137-252.

[8]　Dwork, B.: On the rationality of the zeta-function of an algebraic variety, Am. J. Math., 82 (1960), 631-648.

[9]　Pyatetskiĭ, I. I., Shapiro, Schafarevich, I. R.: The arithmetic of K 3 surefaces, Proc. Steklov Inst. Math., 132 (1973), 45-57.

[10]　Weil, A.: Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. A. M. S. 55 (1949), 497-508.

[第 7 章担当／小山陽一]

索引

● **A**

足立恒雄　*9*
アフィン空間　*184*
Artin　*180*
　——の予想　*162*

● **B**

Bachmann　*9*
ベキ和の方法　*141*
Bernoulli 数　*52, 145*
　一般——　*154*
Bernoulli 多項式　*52*
Bessel　*8, 11*
Bohr　*9*
Borchardt　*42*

● **C**

Chebyshev（Čebyšëv）　*2, 3, 6*
　——の関数　*90*
critical strip　*45*

● **D**

楕円シータ関数　*110*
代数多様体　*187*
　非特異——　*187*
　射影——　*187*
代数的整数　*156*
代数的集合　*185*
代数的数　*155*
Davenport　*33*
Dedekind　*157*
　——ゼータ関数　*13, 145*
de la Vallée-Poussin　*5, 13, 39*
Deligne　*177, 191*
Dirichlet　*1, 12, 17, 29, 145*
　——級数　*145*
　——*L* 関数　*145*
　——の約数問題　*124*
du Bois Reymond　*3*

● **E**

Edwards　*6, 10, 34*
円分体　*157*
Epstein　*12, 169*
　——ゼータ関数　*168*
Euler　*9, 29, 145*
　——-Maclaurin の和分式　*54*
　——の関数　*95*
　——の公式　*59*
　——の無限積　*147, 157*
　——の無限積表示　*146, 175*

——の無限積展開　168
——の和公式　51
——積　93
explicit formula → 明示公式

● F

Farey 分数（列）　95
Fejér 核　136
Fourier の反転公式　35
Fourier の定理　24

● G

ガンマ関数　30
——の倍数公式　72
Gauss　17, 28
——記号　51
——の公式　61
——和　151
Genocchi　36
合同ゼータ関数　180
Goldschmidt　28
Göttingen 大学　5
Gram　34
Gram ブロック　75
Gram の法則　68
Gram の点　68

● H

Hadamard　1, 5, 13, 35, 39
Hagen　8, 11
判別式　156
反転公式　150
Hardy　2, 3, 8, 13, 39
Hecke　13
偏角原理　67
非特異　187
——代数多様体　187
保型波動方程式　105
保型関数　105
Hurwitz ゼータ関数　174

● I

イデアル　156
——類　164
素——　156
単項——　164
定義——　185
incoming 移動表現　103
incoming representer　103
incoming space　102

● J

Jacobi　21, 33, 170
——変換公式　110
純 3 次体　163, 166

● K

関数等式　8, 10, 45, 92
近似——　71, 123
$\zeta(s)$ の関数等式　32, 92
既約　186
Kloostermann 和　193

項
　誤差――　4, 14
　周期的な――　28, 38
　主要――　4
Kronecker　40
　――指標　158
『クレーレ・ジャーナル』
　43
Kummer　146
極　10
鏡像原理　48

● L
Landau　2, 3, 5, 10
Laplace - Beltrami 作用素
　105
Legendre の記号　158
Legendre の関係式　32
Lenstra - Lenstra - Lovasz によるアルゴリズム（L^3 アルゴリズム）　137
Levinson　155
Lindelöa 予想（L. H.）　119
Liouville の関数　94
Littlewood　4, 8, 13
L関数　12

● M
Maclaurin 展開式　63, 73
明示公式　134, 139
Mertens　9
　――予想　133
　――予想の弱い形　127, 133
三井孝美　12
Möbius 関数　14, 37, 90
モジュラー群　105
Montgomery の予想　82
無限積分表示　8, 11

● N
Narasimhan　29
Neuenschwander　29, 42
Nielsen　11
2 次形式　163
　原始――　167
　正定値――　165
2 次体　157

● O
outgoing 移動表現　103
outgoing representer　103
outgoing space　102

● P
Piltz の約数問題　124

● R
Ramanujan　8
零点
　自明でない（非自明な）――
　5, 152

自明な—— 33
零点分布（$\xi(s)$ の） 126
Riemann（リーマン） i, 39, 145
——の素数式 36, 40
—— - Siegel 公式 6, 71, 73
—— - Weil 予想 182, 190
——ゼータ関数 9, 45, 92, 145
Riemann（リーマン）予想 2, 14, 40, 45
拡張された—— 155, 162
Rosser の規則 75
類数 164
留数 10

● S

散乱行列 104
散乱作用素 103
Schmidt 4
整関数 10
生成関数 93
正則 10
整数環 156
積公式 17, 40
Selberg 12, 155
射影空間 183
指標 $\chi(n)$ 12
複素—— 12
原始—— 12
実—— 12
Siegel 4, 5, 8, 11, 154
Skewes 38
素イデアル定理 3
素数公式 3, 11, 13
素数の個数を表わす関数 87
素数定理 3, 13, 40, 88
Stirling 級数 62

● T

体 182
単数基準 157
Tchebycheff → Chebyshev
テータ級数 33, 150
Titchmarsh 34
Turán の不等式 141
Turing の方法 76

● V

van de Lune 34
von Koch 4, 38
von Mangoldt 2, 14, 34, 36, 37, 39
——の関数 89
von Schaper 3

● W

Weierstrass 4, 29

Weber 29
Weil 181, 190
——予想 182, 190
和公式
Euler - Maclaurin の —— 54
Euler の—— 51

● Z
Zagier 38
Zariski 位相 186
漸近展開 14
——公式 6
zeta function（ゼータ関数） i, 2, 9
Dedekind—— 13, 145
Epstein—— 168
合同—— 180
Hurwitz—— 174
リーマン—— 9
絶対ノルム 156

●記号
$\sim$ 3
$\Gamma(s)$ 10
$\zeta(s)$ 2, 9, 18, 92
$\zeta_K(s)$ 13
$\lambda(n)$ 94
$\mu(n)$ 14
$\pi(x)$ 2, 11, 35, 87
$\Pi(s)$ 29
$L(s,\chi)$ 12
$\mathrm{li}\, x$ 87
$\mathrm{Li}(x)$ 3, 37
$N(T)$ 10, 33
$N_0(T)$ 12, 34
$g_k(n)$ 95

●著者紹介

鹿野　健（かの　たけし）——1967年，立教大学理学部数学科を卒業．
現在，岡山大学理学部助教授．専攻は数論．
著書・訳書として，『解析数論』（教育出版），H. ラーデマッヘル・O. テープリッツ著『数と図形』（共訳；日本評論社），D. J. アルバース・G. L. アレクサンダーソン編『数学人群像』（共訳；近代科学社）など．

平林幹人（ひらばやしみきひと）——1971年，金沢大学理学部数学科を卒業．
現在，金沢工業大学講師．専攻は数論．
訳書として，D. J. アルバース・G. L. アレクサンダーソン編『数学人群像』（共訳；近代科学社）．

山野剛助（やまのごうすけ）——1967年，金沢大学理学部数学科を卒業．
現在，金沢工業大学助教授．専攻は数論．

金光　滋（かねみつ　しげる）——1969年，岡山大学理学部数学科を卒業．
現在，近畿大学九州工学部助教授．専攻は数論．
著書・訳書として，W. Narkiewicz著《Number Theory》（ポーランド語より英訳；World Sci.），《Number Theory and Combinatorics, Japan 1984》（World Sci.），D. J. アルバース・G. L. アレクサンダーソン編『数学人群像』（共訳；近代科学社）．

吉野健一（よしのけんいち）——1971年，金沢大学理学部数学科を卒業．
現在，金沢医科大学助教授．専攻は数論．
訳書として，D. J. アルバース・G. L. アレクサンダーソン編『数学人群像』（共訳；近代科学社）．

小山陽一（こやまよういち）——1976年，早稲田大学理工学部数学科を卒業．
現在，金沢工業大学講師．専攻は代数幾何学．

リーマン予想

1991年9月30日　第1版第1刷発行

著　者　鹿　野　健
ほか5名

発行者　大　石　進

発行所　株式会社 日　本　評　論　社
〒170 東京都豊島区南大塚3-10-10
電話 (03)3987-8611(代表)

印刷　精　興　社
製本　松　岳　社

Printed in Japan
ISBN 4-535-78181-8　C3041